METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2003/2004 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 6 febbraio 2004

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Calcolare le seguenti quantità:

$$(a)\ \frac{i^{101}-3}{1-4i} \qquad (b)\ \operatorname{Im}\frac{3i}{2+2i} \qquad (c)\ \operatorname{Im}\left(e^{i\pi/4}\operatorname{Re}\left(e^{i\pi/4}\right)\right)$$

[punteggio 6]

$$(a)\ \frac{i^{101}-3}{1-4i} = \frac{i^{4\ 25+1}-3}{1-4i} = \frac{i-3}{1-4i} = \frac{(i-3)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)}$$
$$= \frac{i-4-3-12i}{1+16} = -\frac{7}{17}-\frac{11}{17}i$$

$$(b)\ \operatorname{Im}\frac{3i}{2+2i} = \operatorname{Im}\frac{3i(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \operatorname{Im}\frac{6i+6}{4+4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$(c)\ \operatorname{Im}\left(e^{i\pi/4}\operatorname{Re}\left(e^{i\pi/4}\right)\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\pi/4}\operatorname{Re}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \operatorname{Im}\left(\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \operatorname{Im}\left(\cos^2\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2 Calcolare tutti i valori distinti delle seguenti radici e rappresentarli graficamente:

$(a)\ \sqrt[2]{i^3} \qquad (b)\ \sqrt[3]{8+i}$

[punteggio 6]

(a) Usando la rappresentazione esponenziale

$$\sqrt[2]{i^3} = \sqrt[2]{-i} = \left(e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)}\right)^{1/2} = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\pi k\right)} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Le due radici distinte sono quelle ottenute per $k = 0, 1$

$$\begin{aligned} c_0 &= e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_1 &= e^{i\frac{7\pi}{4}} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(b) Usando la rappresentazione esponenziale

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8+i} &= \left(\sqrt[2]{64+1}\ e^{i(\theta+2\pi k)}\right)^{1/3} \\ &= \sqrt[6]{65}\ e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right)} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{aligned}$$

dove $\theta = \arctan\frac{1}{8} \simeq \frac{1}{8} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^3\right)$. Le tre radici distinte sono quelle ottenute per $k = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt[6]{65}\ e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[6]{65}\ \left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right) \\ c_1 &= \sqrt[6]{65}\ e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{65}\ \left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right) \\ c_2 &= \sqrt[6]{65}\ e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{65}\ \left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Esercizio 3 Calcolare il valore numerico di

$$\sin\left(2\arccos\left(\frac{1}{5}\right)\right)$$

[punteggio 4]

Posto $\theta = \arccos\left(\frac{1}{5}\right) > 0$ e $z = \cos\theta + i\sin\theta$, dalla formula di de Moivre si ha

$$z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

e quindi

$$\sin 2\theta = \operatorname{Im} z^2 = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{5} + i\sqrt{1-\frac{1}{25}}\right)^2 = 2\,\frac{1}{5}\sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{4\sqrt{6}}{25}$$

Per $\theta = \arccos\left(\frac{1}{5}\right) < 0$ si avrebbe

$$\sin 2\theta = \operatorname{Im} z^2 = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{5} - i\sqrt{1-\frac{1}{25}}\right)^2 = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$$

Esercizio 4 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n e^n z^n \qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!+n} \qquad (c)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n^2} z^n$$

[punteggio 7]

(a) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = ne^n$. Inoltre

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n}{(n+1)e} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$$

Si ha quindi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{e}$$

(b) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta in forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k! + k \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \left\{ |a_k|^{1/k} \right\} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

cioé $R = 1$

(c) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = n^n \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n^2}$$

Inoltre

$$|a_n|^{1/n} = n \left|\frac{1+i}{2}\right|^n = \frac{n}{2^{n/2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

e quindi

$$R = \infty$$

Esercizio 5 Sia $\{x_n\}$ una successione nello spazio metrico (S, d) convergente a $x \in S$. Dimostrare che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy.

[punteggio 5]

Poichè per ipotesi la successione è convergente, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ tale che

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq N$$

Dunque $\forall n, m \geq N$ per la proprietà triangolare della distanza si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e quindi la successione è di Cauchy.

Esercizio 6 Calcolare i seguenti limiti

$$(a)\quad \lim_{z\to\infty}\frac{6(z^3-2)^2}{(z-1)^4}\qquad (b)\quad \lim_{z\to 1}\frac{z^{101}-1}{z-1}\qquad (c)\quad \lim_{z\to i}\frac{(z^2+1)^2}{(z-i)^2}$$

[punteggio 6]

(a) Si ha

$$\lim_{z\to\infty}\frac{6(z^3-2)^2}{(z-1)^4}=\infty$$

infatti

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{6\left(\left(\frac{1}{z}\right)^3-2\right)^2}{\left(\frac{1}{z}-1\right)^4}}=\lim_{z\to 0}\frac{\left(\frac{1}{z}-1\right)^4}{6\left(\left(\frac{1}{z}\right)^3-2\right)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2\,(1-z)^4}{6\,(1-2z^3)^2}=0$$

(b) Sfruttando l'identità $1+z+z^2+\cdots+z^n=(1-z^{n+1})/(1-z)$ con $z\neq 1$ si ha

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^{101}-1}{z-1}=\lim_{z\to 1}(1+z+z^2+\cdots+z^{100})=101$$

(c) Osservando che $z^2+1=(z-i)(z+i)$ si ha

$$\lim_{z\to i}\frac{(z^2+1)^2}{(z-i)^2}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)^2(z+i)^2}{(z-i)^2}=\lim_{z\to i}(z+i)^2=-4$$