

## 1 Spazi vettoriali normati

- (1) Definizione di spazio vettoriale e di norma
- (2) Completezza e spazi di Banach
- (3) Disuguaglianze di Cauchy–Schwarz, di Hölder, di Minkowski
- (4) Esempi: spazio finito–dimensionali:  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$ ,  $M_{n \times n}$
- (5) Esempi: spazi di successioni:  $\ell_\infty$ ,  $\ell_p$ ,  $\ell_0$ ,  $\ell_f$
- (6) Esempi: spazi di funzioni:  $C_b(\mathbb{R})$ ,  $C_p(\mathbb{R})$ ,  $C_0(\mathbb{R})$ ,  $C_c(\mathbb{R})$
- (7) Completezza di  $\ell_\infty$ ,  $\ell_0$ ,  $\ell_p$ ,  $C_b(\mathbb{R})$
- (8) Sottospazi. Sottospazi generati da un insieme di vettori.  $\text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$
- (9) Insieme completo di vettori
- (10) Sottospazi chiusi
- (11) Sottospazi densi
- (12) Dipendenza lineare
- (13) Spazi separabili

## 2 Spazi di Hilbert

- (1) Prodotto scalare (reale e complesso)
- (2) Spazi euclidei e di Hilbert
- (3) Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz in uno spazio euclideo astratto
- (4) Esempi:  $\ell_2$ ,  $C_2(\mathbb{R})$
- (5) Criterio (regola del parallelogramma) per stabilire se una norma proviene o meno da un prodotto scalare (senza dimostrazione). Non esistenza di un prodotto scalare negli spazi  $\ell_p$  (se  $p \neq 2$ ) e  $C_b(\mathbb{R})$ .
- (6) Angolo fra due vettori
- (7) Sistemi ortogonali e ortonormali. Basi
- (8) Un sistema ortogonale è linearmente indipendente
- (9) Procedimento di ortogonalizzazione di Gram–Schmidt. Esempio: polinomi di Legendre
- (10) Esistenza di una base in uno spazio euclideo separabile
- (11) Coefficienti di Fourier rispetto ad una base
- (12) Disuguaglianza di Bessel, uguaglianza di Parseval
- (13) Teorema di Riesz–Fisher

- (14) Complementi ortogonali.  $(W^\perp)^\perp = \overline{W}$
- (15) Se  $W$  è un sottospazio chiuso, allora ogni vettore  $v$  può essere univocamente scritto come  $v = w + z$  in cui  $w \in W$  e  $z \in W^\perp$
- (16) Proiezione ortogonale su un sottospazio. Costruzione esplicita dell'operatore  $\pi_W$  che rappresenta la proiezione ortogonale su  $W$
- (17) Proprietà di  $\pi_W$

### 3 Funzionali lineari e distribuzioni

- (1) Esempi di funzionali lineari
- (2) Spazi di successioni: il funzionale  $\varphi_a(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$
- (3) Spazi di funzioni: il funzionale  $\varphi_g(f) := \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x) dx$
- (4) La delta di Dirac
- (5) Continuità e limitatezza di un funzionale lineare.
- (6) Continuità  $\Leftrightarrow$  limitatezza
- (7) Norma di un funzionale lineare continuo
- (8) Spazio duale
- (9) La norma di  $\varphi_a$  nello spazio  $\ell_p$  è uguale a  $\|a\|_q$  con  $p > 1$ ,  $1/p + 1/q = 1$
- (10)  $\ell_1^* = \ell_\infty$ .  $\ell_0^* = \ell_1$
- (11) Se  $H$  è uno spazio di Hilbert,  $H$  è isomorfo ad  $H^*$
- (12) Convergenza debole. Esempi di successioni convergenti debolmente ma non in norma
- (13) Lo spazio  $\mathcal{K}$  delle funzioni infinitamente differenziabili a supporto compatto
- (14) Convergenza nello spazio  $\mathcal{K}$  ( $f_n \xrightarrow{\mathcal{K}} f$ )
- (15) Spazio  $\mathcal{K}^*$  delle distribuzioni
- (16) Se  $g$  è localmente integrabile allora  $\varphi_g$  è una distribuzione
- (17) Le distribuzioni  $\vartheta$  e  $\delta_a$
- (18) Approssimazioni delle delta con distribuzioni regolari
- (19)  $P(1/x)$
- (20) Somma di distribuzioni. Prodotto di una distribuzione per una funzione
- (21) Convergenza nello spazio  $\mathcal{K}^*$
- (22) Derivata di una distribuzione
- (23) Derivata di una distribuzione associata ad una funzione differenziabile a tratti
- (24) Derivate delle distribuzioni  $\vartheta$ ,  $\delta_0$ ,  $\log|x|$
- (25) Rappresentazioni integrali della  $\delta$  e della  $\vartheta$

## 4 Operatori lineari

- (1) Operatori lineari
- (2) Equivalenza fra continuità e limitatezza
- (3) Norma di un operatore lineare limitato
- (4) Lo spazio  $\mathcal{L}(V, Z)$  di tutti gli operatori lineari limitati da  $V$  in  $Z$
- (5) Ker e Ran di un operatore limitato
- (6) Esempi: l'identità, operatori in spazi finito dimensionale, gli operatori di traslazione  $\vartheta_{\pm}$  negli spazi di successioni, operatori integrali  $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy$
- (7) Operazioni sugli operatori lineari (somma, prodotto per un numero, composizione)
- (8)  $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$
- (9) Se  $Z$  è completo allora  $\mathcal{L}(V, Z)$  è completo
- (10) Serie di potenze di operatori lineari
- (11) Operatori lineari invertibili
- (12) Operatori lineari limitati invertibili con inverso non limitato
- (13) Teorema sull'operatore inverso (senza dimostrazione)
- (14) Se  $\|A\| < 1$  allora  $(I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A^k$
- (15) Operatore aggiunto
- (16) Proprietà dell'aggiunto:  $(S + T)^* = S^* + T^*$ ,  $(cT)^* = \bar{c}T^*$ ,  $(ST)^* = T^*S^*$ ,  $T^{**} = T$ ,  $\|T^*\| = \|T\|$
- (17)  $\text{Ker } T^* = (\text{Ran } T)^{\perp}$ ,  $\overline{\text{Ran } T^*} = (\text{Ker } T)^{\perp}$
- (18) Operatori autoaggiunti
- (19) Proiezioni ortogonali e proprietà
- (20) Spettro di un operatore  $\sigma(T)$ . Autovalori  $\sigma_p(T)$  e spettro continuo  $\sigma_c(T)$
- (21) Lo spettro di  $T$  è contenuto in un disco di centro 0 e raggio  $\|T\|$
- (22) Se  $T$  è autoaggiunto  $\sigma(T)$  è reale
- (23) Operatori compatti
- (24) Criterio di compattezza mediante approssimazione con operatori di rango finito (senza dimostrazione)
- (25) Teorema di Fredholm e spettro di un operatore compatto (senza dimostrazione)
- (26) Teorema di Hilbert–Schmidt e spettro di un operatore compatto autoaggiunto (senza dimostrazione)

## 5 (Brevissimi) cenni di teoria della misura

- (1) Sigma-algebre, misure
- (2) La misura di Lebesgue
- (3) Gli spazi  $L_p(\mathbb{R})$  come completamento degli spazi  $C_p(\mathbb{R})$

## 6 Serie e trasformate di Fourier

- (1) Lo spazio  $L_2[-\pi, \pi]$
- (2) La base dei polinomi trigonometrici
- (3) Serie di Fourier e sua convergenza in  $L_2$
- (4) La serie di Fourier in forma complessa
- (5) I polinomi di Legendre
- (6) La condizione di Dini per la convergenza puntuale della serie di Fourier
- (7) Una condizione per la convergenza uniforme della serie di Fourier
- (8) La trasformata di Fourier
- (9) Formula di inversione
- (10) Proprietà fondamentali della trasformata di Fourier
- (11) Relazione fra la regolarità di una funzione e l'andamento all'infinito della sua trasformata di Fourier
- (12) Applicazione alla soluzione dell'equazione del calore