MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2014/2015 – Prof. C. Presilla

Prova A3 – 16 settembre 2015

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Posto $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$d(z_1, z_2) = |\mathrm{Re}(z_1 - z_2)| + |\mathrm{Re}(z_1 - z_2)|^2 + |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)|^2 ,$$

dimostrare che $(\mathbb{C}, d)$ è uno spazio metrico.

[punteggio 5]

Per dimostrare che $(\mathbb{C}, d)$ è uno spazio metrico occorre mostare che d è una distanza, ovvero che $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sono soddisfatte le proprietà

a) $d(z_1, z_2) \geq 0$;

b) $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $z_1 = z_2$;

c) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$;

d) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$.

Si osservi che $d(z_1, z_2) = d_1(z_1, z_2) + d_2(z_1, z_2)$, dove

$$d_1(z_1, z_2) = |\mathrm{Re}(z_1 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)|$$

mentre $d_2(z_1, z_2)$ è la distanza Euclidea al quadrato.

$$d_2(z_1, z_2) = |\mathrm{Re}(z_1 - z_2)|^2 + |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)|^2 = d_E(z_1, z_2)^2.$$

Basta allora dimostrare che la funzione d_1 è una distanza per avere che anche d lo è. La prima proprietà è vera in quanto il valore assoluto di un numero reale è sempre non negativo. La seconda segue dal fatto che $d_1(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $|\mathrm{Re}(z_1 - z_2)| = |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)| = 0$ che a sua volta è vera se e solo se $z_1 = z_2$. La terza discende dal fatto che $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ risulta $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$. Per quanto riguarda la proprietà triangolare si ha

$$\begin{aligned} d_1(z_1, z_2) &= |\mathrm{Re}(z_1 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)| \\ &\leq |\mathrm{Re}(z_1 - z_3)| + |\mathrm{Re}(z_3 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_3)| + |\mathrm{Im}(z_3 - z_2)| \\ &= (|\mathrm{Re}(z_1 - z_3)| + |\mathrm{Im}(z_1 - z_3)|) + (|\mathrm{Re}(z_3 - z_2)| + |\mathrm{Im}(z_3 - z_2)|) \\ &= d_1(z_1, z_3) + d_1(z_3, z_2), \end{aligned}$$

avendo sfruttato il fatto che $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ risulta $|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$.

Esercizio 2 Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, considerando il ramo principale nel caso di funzioni polidrome, e il valore delle rispettive derivate in tale dominio:

a) $\log(z^5)$, b) $\dfrac{1}{\cos\sqrt{z}}$.

[punteggio 6]

---

a) Il ramo principale di $\log z$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa. Pertanto la funzione in esame è analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione dei punti tali che

$$z^5 = -t, \qquad t \in [0, \infty),$$

ovvero

$$z(t) = (t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^{1/5} = t^{1/5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2\pi k)/5}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log\left(z^5\right) = \frac{5}{z}.$$

b) La funzione $\cos z$ è intera mentre il ramo principale di $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2}\log z)$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa. Pertanto la funzione in esame è analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa e degli zeri di $\cos\sqrt{z}$. Tali zeri sono i punti z tali che $\sqrt{z} = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cioé i punti $z_k = \pi^2(k + 1/2)^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\cos\sqrt{z}} = \frac{\sin\sqrt{z}}{2\sqrt{z}\cos^2\sqrt{z}}.$$

Esercizio 3 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \left(z^3 + z^{3/2}\right) \mathrm{d}z,$$

dove γ è il perimetro, orientato positivamente, del quadrato di vertici $\pm(R \pm \mathrm{i}R)$, $R > 0$.

[punteggio 6]

L'integrale è la somma di due integrali

$$\int_\gamma \left(z^3 + z^{3/2}\right) \mathrm{d}z = \int_\gamma z^3 \mathrm{d}z + \int_\gamma z^{3/2} \mathrm{d}z.$$

Il primo è nullo in quanto la funzione integranda è intera e il cammino di integrazione chiuso. Per valutare il secondo integrale si osservi che, posto $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, la funzione integranda è definita da

$$z^{3/2} = r^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\theta}, \qquad r > 0, \qquad -\pi < \theta < \pi.$$

Tale funzione è analitica su ogni cammino $\gamma_\varepsilon = \gamma - [-R - \mathrm{i}\varepsilon, -R + \mathrm{i}\varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$ e ivi ammette come primitiva il ramo principale di $\frac{2}{5} z^{5/2}$. Posto $\varphi(\varepsilon) = \arctan(\varepsilon/R)$, si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^{3/2} \mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} z^{3/2} \mathrm{d}z \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{5} z^{5/2} \Bigg|_{z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi + \varphi(\varepsilon))}}^{z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - \varphi(\varepsilon))}} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{5} R^{5/2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{2}(\pi - \varphi(\varepsilon))} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{2}(-\pi + \varphi(\varepsilon))} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{i} \frac{4}{5} R^{5/2} \cos\left(\frac{5}{2} \varphi(\varepsilon) \right) \\
&= \mathrm{i} \frac{4}{5} R^{5/2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, determinare, fino all'ordine z^3 compreso, lo sviluppo in serie di potenze intorno a $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \log(\cos z).$$

Classificare la natura della singolarità di $f(z)$ in $z = 0$.

[punteggio 5]

Si osservi che $f(z)$ è analitica ovunque ad eccezione della singolarità isolata in $z = 0$ e del semiase di diramazione $[\pi/2, \infty)$. Usando gli sviluppi di Taylor notevoli

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad |z| < \infty,$$

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \qquad |z| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^4} \log(\cos z) &= \frac{1}{z^4} \log\left[1 + \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)\right] \\
&= \frac{1}{z^4}\left[\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= -\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{45} z^2 + O(z^4).
\end{aligned}$$

Lo sviluppo così trovato è uno sviluppo di Laurent valido nella regione $0 < |z| < \pi/2$. La funzione $f(z)$ presenta un polo doppio in $z = 0$ con residuo nullo.

Esercizio 5 Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione avente uno zero di ordine α nel punto a e sia $g : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ analitica in a. Dimostrare che

$$\operatorname*{Res}_{z=a} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \alpha g(a).$$

[punteggio 5]

Se f ha in a uno zero di ordine α, allora $f(z) = h(z)(z-a)^\alpha$ con h analitica e non nulla in a. Pertanto

$$\begin{aligned} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} &= g(z)\frac{h'(z)(z-a)^\alpha + h(z)\alpha(z-a)^{\alpha-1}}{h(z)(z-a)^\alpha} \\ &= \frac{g(z)h'(z)}{h(z)} + \frac{\alpha}{z-a}g(z). \end{aligned}$$

Poiché g e gh'/h sono analitiche in a, la funzione gf'/f ha un polo semplice in a con

$$\operatorname*{Res}_{z=a} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \alpha g(a).$$

Esercizio 6 Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-1}}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x.$$

[punteggio 6]

Si consideri la funzione complessa $f(z) = (z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-1})/(z^2+1)^2$ che ha due poli doppi in $z = \pm\mathrm{i}$ e la si integri lungo il perimetro γ, orientato positivamente, del quadrato di vertici $-R_1$, R_2, $R_2 + \mathrm{i}(R_1 + R_2)$, $-R_1 + \mathrm{i}(R_1 + R_2)$, con $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ e $R_1 + R_2 > 1$. Per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} f(z) \\
&= 2\pi\mathrm{i} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-1}}{(z+\mathrm{i})^2}\right|_{z=\mathrm{i}} \\
&= 2\pi\mathrm{i} \left.\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{i}z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})(z+\mathrm{i})^2 - (z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-1})2(z+\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^4}\right|_{z=\mathrm{i}} \\
&= 2\pi\mathrm{i} \frac{-4\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-1})}{16} \\
&= \frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-1}).
\end{aligned}$$

D'altro canto

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{4} \int_{\lambda_k} f(z)\mathrm{d}z,$$

dove $\lambda_1(x) = x$, $-R_1 \le x \le R_2$, $\lambda_2(y) = R_2 + \mathrm{i}y$, $0 \le y \le R_1 + R_2$, $\lambda_3(x) = x + \mathrm{i}(R_1 + R_2)$, $R_2 \ge x \ge -R_1$, e $\lambda_4(y) = -R_1 + \mathrm{i}y$, $R_1 + R_2 \ge y \ge 0$. Gli integrali lungo i cammini che compongono γ valgono

$$\int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R_1}^{R_2} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-1}}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{0}^{R_1+R_2} \frac{y\mathrm{e}^{\mathrm{i}R_2 - y} + \mathrm{e}^{-1}}{((R_2 + \mathrm{i}y)^2+1)^2}\mathrm{i}\mathrm{d}y \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0,$$

$$\int_{\lambda_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{R_2}^{-R_1} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x - (R_1+R_2)} + \mathrm{e}^{-1}}{((x + \mathrm{i}(R_1+R_2))^2+1)^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0,$$

$$\int_{\lambda_4} f(z)\mathrm{d}z = \int_{R_1+R_2}^{0} \frac{y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R_1 - y} + \mathrm{e}^{-1}}{((-R_1 + \mathrm{i}y)^2+1)^2}\mathrm{i}\mathrm{d}y \xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} 0.$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-1}}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}(1+\mathrm{i}).$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2014/2015 – Prof. C. Presilla

Prova B3 – 16 settembre 2015

Cognome	
Nome	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale $V = C_2[0,1]$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ sia $W = \text{span}\{x, x^3\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x^2$ in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$.

[punteggio 5]

Si ortogonalizzi il sistema di vettori x, x^3

$$u_1(x) = x,$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$u_2(x) = x^3 - \frac{\langle x^3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{4}{175}.$$

Usando il proiettore π_W

$$\pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k,$$

si ha

$$w(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle x^2, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k(x) = \frac{3}{4}x + \frac{35}{48}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = \frac{35}{48}x^3 + \frac{5}{16}x$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = -\frac{35}{48}x^3 + x^2 - \frac{5}{16}x.$$

Si osservi, per verifica, che

$$\langle w, z\rangle = \int_0^1 \left(\frac{35}{48}x^3 + \frac{5}{16}x\right)\left(-\frac{35}{48}x^3 + x^2 - \frac{5}{16}x\right) dx = 0.$$

Esercizio 2 Sia A un operatore lineare limitato su V spazio di Banach. Enunciare e dimostrare il teorema sull'esistenza di $(I - A)^{-1}$.

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 147.

Esercizio 3 Calcolare le seguenti distribuzioni semplificando il più possibile il risultato

(a) $x(\sin x\ \delta_0 - \cos x\ \theta)'$ (b) $(x(\log|x|)')'$ (c) $(\cos x \operatorname{sgn} x)'''$

[punteggio 6]

a) Usando $\theta' = \delta_0$ e $h\delta_0 = h(0)\delta_0$ con $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned}
x(\sin x\ \delta_0 - \cos x\ \theta)' &= x(-\cos x\ \theta)' \\
&= x(\sin x\ \theta - \cos x\ \theta') \\
&= x\sin x\ \theta - x\cos x\ \delta_0 \\
&= x\sin x\ \theta
\end{aligned}$$

b) Usando $(\log|x|)' = P(1/x)$, si ha

$$(x(\log|x|)')' = (xP(1/x))' = (1)' = 0$$

c) Usando $(\operatorname{sgn} x)' = 2\delta_0$ e $h\delta_0 = h(0)\delta_0$ con $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned}
(\cos x \operatorname{sgn} x)''' &= (-\sin x \operatorname{sgn} x + \cos x\ 2\delta_0)'' \\
&= (-\sin x \operatorname{sgn} x + 2\delta_0)'' \\
&= (-\cos x \operatorname{sgn} x - \sin x\ 2\delta_0 + 2\delta_0')' \\
&= (-\cos x \operatorname{sgn} x + 2\delta_0')' \\
&= \sin x \operatorname{sgn} x - \cos x\ 2\delta_0 + 2\delta_0'' \\
&= \sin x \operatorname{sgn} x - 2\delta_0 + 2\delta_0'' \\
&= \sin|x| - 2\delta_0 + 2\delta_0''
\end{aligned}$$

Esercizio 4 La trasformata di Fourier di una funzione f

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

può essere pensata come l'azione di un operatore lineare $\mathcal{F}$ dallo spazio delle funzioni $(L_1(\mathbb{R};\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ allo spazio delle funzioni $(C_0(\mathbb{R};\mathbb{C}), \|\cdot\|_u)$. Calcolare la norma dell'operatore $\mathcal{F}$.

[punteggio 6]

$\forall f \in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(f)\|_u &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx\right| \\ &\leq \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left|f(x)e^{-i\lambda x}\right| dx \\ &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f\|_1 = \|f\|_1\end{aligned}$$

e pertanto

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{f\in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ f\neq 0} \frac{\|\mathcal{F}(f)\|_u}{\|f\|_1} \leq 1.$$

D'altro canto, con la scelta

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

si ha

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{-1}^{1} e^{-i\lambda x}dx = 2\ \frac{\sin\lambda}{\lambda}$$

e quindi

$$\frac{\|\mathcal{F}(f)\|_u}{\|f\|_1} = \frac{\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} 2\left|\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right|}{\int_{-1}^{1}|1|\,dx} = \frac{2}{2} = 1.$$

Alternativamente, per ogni funzione $f \in L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ tale che $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\|\mathcal{F}(f)\|_u = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx\right| \geq \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \|f\|_1.$$

Si conclude che $\|\mathcal{F}\| = 1$.

Esercizio 5 Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi,\pi]$ la funzione $f(x)=\operatorname{sgn}(x)\exp(2\,|x|)$ e studiare la convergenza puntuale della serie così ottenuta.

[punteggio 5]

La funzione $f(x)$ è dispari, pertanto si ha

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x=0,$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\sin(kx)\mathrm{d}x=\frac{2k\left(1-(-1)^k\mathrm{e}^{2\pi}\right)}{(4+k^2)\pi}.$$

In conclusione

$$\operatorname{sgn}(x)\mathrm{e}^{2|x|}\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\left(1-(-1)^k\mathrm{e}^{2\pi}\right)}{(4+k^2)\pi}\sin(kx).$$

Il prolungamento periodico da $(-\pi,\pi]$ a $\mathbb{R}$ di $f(x)$ è una funzione continua a tratti, con punti di discontinuità in 0 e $\pm\pi$. Pertanto la serie trigonometrica sopra scritta converge puntualmente a $f(x)$ per $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ mentre per $x=0$ e $x=\pm\pi$ converge rispettivamente a $(f(0^+)+f(0^-))/2=0$ e $(f(\pm\pi^+)+f(\pm\pi^-))/2=0$.

Esercizio 6 Sia T l'operatore lineare in $(C[-1,2];\mathbb{C},\|\cdot\|_u)$ definito da

$$(Tf)(x) = g(x)f(x) \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x < 0 \\ \mathrm{e}^x & 0 \le x \le 1 \\ \mathrm{e} & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Determinare lo spettro di T.

[punteggio 6]

Determiniamo $\mathrm{Ker}(zI - T) = \{f \in C([-1,2];\mathbb{C}) : (zI-T)f = 0\}$ al variare di $z \in \mathbb{C}$. L'equazione per gli autovalori $(zI-T)f = 0$ implica

$$(z - g(x))f(x) = 0 \qquad \forall x \in [-1,2]$$

Se $z \in \mathbb{C} \setminus [1,\mathrm{e}]$, il fattore $z - g(x)$ non si annulla mai per $x \in [-1,2]$ quindi l'unica soluzione è quella banale $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo e z non è un autovalore.
Se $z \in (1,\mathrm{e})$, il fattore $z - g(x)$ si annulla solo in $x_z = \ln z$. Pertanto $f(x) = 0$ $\forall x \in [-1, x_z) \cup (x_z, 2]$ ma dovendo f essere continua, si conclude ancora $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo e z non è un autovalore.
Se $z = 1$, l'equazione $(zI-T)f = 0$ è soddisfatta per tutte quelle funzioni f continue in $[-1,2]$ e non nulle solo in $[-1,0)$. Dunque $z = 0$ è un autovalore di T e a tale autovalore corrispondono infinite autofunzioni.
Se $z = \mathrm{e}$, l'equazione $(zI-T)f = 0$ è soddisfatta per tutte quelle funzioni f continue in $[-1,2]$ e non nulle solo in $(1,2]$. Dunque $z = \mathrm{e}$ è un autovalore di T e a tale autovalore corrispondono infinite autofunzioni. In conclusione, $\sigma_p(T) = \{1,\mathrm{e}\}$.
Studiamo ora $\mathrm{Ran}(zI - T) = \{h \in C([-1,2];\mathbb{C}) : h = (zI-T)f,\ f \in C([-1,2];\mathbb{C})\}$ al variare di $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$. L'equazione $(zI-T)f = h$ implica

$$f(x) = \frac{h(x)}{z - g(x)} \qquad \forall x \in [-1,2]$$

Se $z \in (1,\mathrm{e})$, per ogni h tale che $h(x_z) \neq 0$ la f diverge in x_z e quindi risulta non continua. In tal caso $zI - T$ è non suriettivo ma, per quanto visto in precedenza, iniettivo, cioè $z \in \sigma_c(T)$.
Se $z \in \mathbb{C} \setminus [1,\mathrm{e}]$, la funzione f, in quanto rapporto di funzioni continue con la funzione a denominatore mai nulla, è continua in $[-1,2]$. Pertanto $\mathrm{Ran}(zI - T) = (C[-1,2];\mathbb{C})$. Quindi $zI - T$ è suriettivo e anche iniettivo e quindi invertibile.
Riepilogando, $\sigma_p(T) = \{1,\mathrm{e}\}$, $\sigma_c(T) = (1,\mathrm{e})$, $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus [1,\mathrm{e}]$.