MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2012/2013 – Prof. C. Presilla

Prova A4 – 30 gennaio 2014

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!} z^n$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{1+n+n^2+n^3}$

[punteggio 6]

---

a) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!} \frac{(3n+4)!}{(3n+3)! + 4^{n+1}} \\ &= \frac{(3n+4)(3n+3)(3n+2)[1 + 4^n/(3n)!]}{(3n+3)(3n+2)(3n+1) + 4^{n+1}/(3n)!} \xrightarrow{n\to\infty} 1\end{aligned}$$

avendo usato $\ln n! \sim n \ln n - n$. Si ha quindi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$$

b) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta in forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 1 + k + k^2 + k^3 \qquad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \left\{ |a_k|^{1/k} \right\} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

cioè $R = 1$.

Esercizio 2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$e^{z^2} = -1$$

[punteggio 5]

Prendendo il logaritmo di entrambi i membri si ha

$$z^2 = \log(-1) = \log\left(1\ e^{i\pi}\right) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = (2k+1)i\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

e quindi estraendo la radice quadrata

$$z = \sqrt{(2k+1)\pi e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{(2k+1)\pi}\, e^{\left(i\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{2}\right)} \qquad n = 0, 1 \qquad \text{se } k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$z = \sqrt{|2k+1|\,\pi e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \sqrt{|2k+1|\,\pi}\, e^{\left(i\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi n}{2}\right)} \qquad n = 0, 1 \qquad \text{se } k = -1, -2, \ldots$$

Ponendo $k = -m - 1$, è possibile riscrivere il secondo sistema di soluzioni come

$$z = \sqrt{(2m+1)\pi}\ e^{\left(i\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi n}{2}\right)} \qquad n = 0, 1 \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono

$$z_{1,k}^{\pm} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{2k+1}{2}\ \pi} \qquad z_{2,k}^{\pm} = \pm(1-i)\sqrt{\frac{2k+1}{2}\ \pi}$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots$

Esercizio 3 Enunciare e dimostrare il teorema di Liouville.

[punteggio 5]

Se f è intera e limitata in $\mathbb{C}$, allora f è costante in $\mathbb{C}$. Per la dimostrazione vedi testo.

Esercizio 4 Determinare la natura della singolarità in $z = 0$ della seguente funzione e calcolarne il corrispondente residuo

$$f(z) = \frac{e^z \sin z}{z(1 - \cos z)}.$$

[punteggio 6]

Espandendo in serie di Mac Laurin le funzioni esponenziale, seno e coseno, si ha

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right)}{z\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots\right)} \\
&= \frac{2}{z^3} \frac{z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \dots}{1 - \left(\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{360}z^4 + \dots\right)} \\
&= \frac{2}{z^3}\left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \dots\right) \\
&\quad \times \left[1 + \left(\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{360}z^4 + \dots\right) + \left(\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{360}z^4 + \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= \frac{2}{z^3}\left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \dots\right)\left(1 + \frac{1}{12}z^2 + \frac{7}{720}z^4 + \dots\right) \\
&= \frac{2}{z^3}\left(z + z^2 + \frac{5}{12}z^3 + \frac{1}{12}z^4 - \frac{1}{720}z^5 + \dots\right) \\
&= \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{5}{6} + \frac{z}{6} - \frac{z^2}{360} + \dots
\end{aligned}$$

Pertanto $f(z)$ ha in $z = 0$ un polo di ordine 2 con

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2$$

Esercizio 5 Sviluppare in serie di Taylor di centro $z_0 = 3$ il ramo principale della funzione $\log z$ e determinare il raggio di convergenza di tale serie.

[punteggio 5]

Il ramo principale di $\log z$

$$\log z = \ln|z| + i \arg z \qquad |z| > 0 \qquad -\pi < \arg z < \pi$$

è analitico in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione del semiasse reale negativo origine compresa. E' evidente che il massimo cerchio di centro $z_0 = 3$ in cui $\log z$ è analitica ha raggio 3. Detto z un qualsiasi punto tale che $|z-3| < 3$, si ha

$$\begin{aligned}
\log z - \log 3 &= \int_3^z \frac{ds}{s} = \int_3^z \frac{ds}{3\left(1+\frac{s-3}{3}\right)} \\
&= \int_3^z \frac{ds}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{s-3}{3}\right)^k \qquad \left|\frac{s-3}{3}\right| < 1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} \int_3^z ds (s-3)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)3^{k+1}} (z-3)^{k+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 3^n} (z-3)^n
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\log z &= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 3^n} (z-3)^n \\
&= \ln 3 + \frac{z-3}{3} - \frac{(z-3)^2}{18} + \frac{(z-3)^3}{81} + \ldots
\end{aligned}$$

Una verifica diretta conferma che il raggio di convergenza della serie è $R = 3$. Infatti, detto a_n il coefficiente n-esimo della serie, si ha

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(n+1)3^{n+1}}{n 3^n} = 3\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 3$$

Esercizio 6 Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+8} dx, \qquad \omega < 0$$

[punteggio 6]

Posto $f(z) = e^{-i\omega z}/(z^2 + a^2)$ e detti $\gamma_\pm = \lambda_R + \gamma_{R\pm}$ i cammini chiusi di integrazione con

$$\lambda_R(x) = x, \qquad -R \le x \le R$$
$$\gamma_{R\pm}(\theta) = Re^{\pm i\theta}, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

si osservi che per $R \to \infty$ la funzione $f(z)$ si annulla su γ_{R+} se $\omega < 0$ e su γ_{R-} se $\omega > 0$. Inoltre $f(z)$ è analitica su e dentro $\gamma_\pm$ ad eccezione del polo semplice in $z = \pm ia$. Per $\omega < 0$ si ha

$$\int_{\gamma_+} f(z)dz = \int_{\lambda_R} f(z)dz + \int_{\gamma_{R_+}} f(z)dz$$
$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ia} f(z) = 2\pi i \left. \frac{e^{-i\omega z}}{z+ia} \right|_{z=ia} = \pi \frac{e^{\omega a}}{a},$$

mentre per $\omega > 0$

$$\int_{\gamma_-} f(z)dz = \int_{\lambda_R} f(z)dz + \int_{\gamma_{R_-}} f(z)dz$$
$$= -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-ia} f(z) = -2\pi i \left. \frac{e^{-i\omega z}}{z-ia} \right|_{z=-ia} = \pi \frac{e^{-\omega a}}{a}.$$

Si noti il segno negativo dovuto al verso di percorrenza negativo su γ_-. I singoli cammini di integrazione valgono

$$\int_{\lambda_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2} dx$$

$$\int_{\gamma_{R\pm}} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{e^{-i\omega R(\cos\theta \pm i \sin\theta)}}{R^2 e^{\pm i2\theta} + a^2} \left(\pm i R e^{\pm i\theta} \right) d\theta$$

e quindi

$$\left| \int_{\gamma_{R_{-\operatorname{sgn}(\omega)}}} f(z)dz \right| \le \pi \frac{R}{R^2 - a^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

In conclusione, nel limite $R \to \infty$ per ogni valore di ω, compreso il caso banale $\omega = 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{a}\, e^{-|\omega| a}.$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2012/2013 – Prof. C. Presilla

Prova B4 – 30 gennaio 2014

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Stabilire, motivando sinteticamente in caso di risposta positiva o portando un esempio esplicito nel caso di risposta negativa, se F è un funzionale lineare continuo nello spazio vettoriale normato indicato.

a) $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \qquad (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$

b) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{4+|x|^{1/3}} \mathrm{d}x \qquad (C_{5/4}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{5/4})$

c) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \qquad (C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

d) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+1)}{5+(x-3)^2} \mathrm{d}x \qquad (C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

e) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\log(7+x^8)} \mathrm{d}x \qquad (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

f) $F(f) = \int_3^8 (f(x)+1) \mathrm{d}x \qquad (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

[punteggio 6]

---

a) No. Per $x = (1,1,1,\dots)$ risulta $F(x) = \infty$.
b) Si. La linearità è ovvia, la limitatezza si dimostra usando la disuguaglianza di Hölder

$$|F(f)| \le \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x)}{4+|x|^{1/3}} \right| \mathrm{d}x \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{5/4} \right)^{4/5} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{4+|x|^{1/3}} \right|^5 \mathrm{d}x \right)^{1/5}$$

c) Si. La linearità è ovvia e la limitatezza pure

$$|F(f)| \le \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) \mathrm{e}^{-x^2} \right| \mathrm{d}x \le \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$$

d) Si. Stesso ragionamento del caso c).
e) No. Per $f(x) = 1/(1+|x|^{1/2})$ l'integrale diverge.
f) No. Per $f(x) = 0$ risulta $F(f) \neq 0$.

Esercizio 2 Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3 + x_5, \dots)$$

Determinare la norma di T e l'operatore aggiunto T^*.

[punteggio 5]

Per ogni $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |(Tx)_k|^2 = |x_2|^2 + \sum_{k=2}^{\infty} |x_{k-1} + x_{k+1}|^2 \\
&\leq |x_2|^2 + 2\sum_{k=2}^{\infty} |x_{k-1}|^2 + 2\sum_{k=2}^{\infty} |x_{k+1}|^2 \\
&= 2\|x\|_2^2 + 2\|x\|_2^2 - |x_2|^2 - 2|x_1|^2 \leq 4\|x\|_2^2
\end{aligned}$$

e quindi

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2} \leq 2$$

Si consideri ora la successione $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ con $x^{(n)} \in \ell_2(\mathbb{C})$ definita da

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

L'azione dell'operatore T su $x^{(n)}$ fornisce

$$(Tx^{(n)})_k = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 2 & 2 \leq k \leq n-1 \\ 1 & k = n, n+1 \\ 0 & k > n+1 \end{cases}$$

e risulta

$$\frac{\|Tx^{(n)}\|_2}{\|x^{(n)}\|_2} = \frac{\sqrt{4(n-2)+3}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{1 - 5/n} \xrightarrow{n \to \infty} 2$$

Deve perciò essere $\|T\| \geq 2$. In conclusione, $\|T\| = 2$.
Dalla definizione di aggiunto, $\forall x, y \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned}
\langle T^*x, y\rangle &= \langle x, Ty\rangle \\
&= x_1\overline{y_2} + x_2(\overline{y_1} + \overline{y_3}) + x_3(\overline{y_2} + \overline{y_4}) + x_4(\overline{y_3} + \overline{y_5}) + \dots \\
&= x_2\overline{y_1} + (x_1 + x_3)\overline{y_2} + (x_2 + x_4)\overline{y_3} + (x_3 + x_5)\overline{y_4} + \dots
\end{aligned}$$

Dalla arbitrarietà di y, segue

$$T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3 + x_5, \dots) \qquad \forall x \in \ell_2(\mathbb{C})$$

cioè $T^* = T$.

<u>Esercizio 3</u> Sia A un operatore lineare limitato su V spazio di Banach. Enunciare e dimostrare il teorema sull'esistenza di $(I - A)^{-1}$.

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 147.

Esercizio 4 Calcolare le seguenti distribuzioni semplificando il più possibile il risultato

(a) $x(\sin x\ \delta_0 - \cos x\ \theta)'$ (b) $(x(\log|x|)')'$ (c) $(\cos x \operatorname{sgn} x)'''$

[punteggio 6]

a) Usando $\theta' = \delta_0$ e $h\delta_0 = h(0)\delta_0$ con $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} x(\sin x\ \delta_0 - \cos x\ \theta)' &= x(-\cos x\ \theta)' \\ &= x(\sin x\ \theta - \cos x\ \theta') \\ &= x\sin x\ \theta - x\cos x\ \delta_0 \\ &= x\sin x\ \theta \end{aligned}$$

b) Usando $(\log|x|)' = P(1/x)$, si ha

$$(x(\log|x|)')' = (xP(1/x))' = (1)' = 0$$

c) Usando $(\operatorname{sgn} x)' = 2\delta_0$ e $h\delta_0 = h(0)\delta_0$ con $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} (\cos x \operatorname{sgn} x)''' &= (-\sin x \operatorname{sgn} x + \cos x\ 2\delta_0)'' \\ &= (-\sin x \operatorname{sgn} x + 2\delta_0)'' \\ &= (-\cos x \operatorname{sgn} x - \sin x\ 2\delta_0 + 2\delta_0')' \\ &= (-\cos x \operatorname{sgn} x + 2\delta_0')' \\ &= \sin x \operatorname{sgn} x - \cos x\ 2\delta_0 + 2\delta_0'' \\ &= \sin x \operatorname{sgn} x - 2\delta_0 + 2\delta_0'' \\ &= \sin|x| - 2\delta_0 + 2\delta_0'' \end{aligned}$$

Esercizio 5 Sia T l'operatore lineare su $\ell_2(\mathbb{C})$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2 - x_1, \frac{x_3 - x_2}{2}, \frac{x_4 - x_3}{3}, \frac{x_5 - x_4}{4}, \dots)$$

Determinare tutti gli autovalori di T. Stabilire se $z = 0$ appartiene allo spettro continuo di T.

[punteggio 6]

L'equazione per gli autovalori $(zI - T)x = 0$ implica

$$x_{k+1} = (1 + z)(1 + 2z) \dots (1 + kz)x_1 = x_1 \prod_{j=1}^{k} (1 + jz)$$

- Se $z = 0$, si ha $x_{k+1} = x_1$ per ogni k. Per $x_1 \neq 0$, la successione non identicamente nulla $x = (x_1, x_1, \dots) \notin \ell_2$. Dunque $z = 0$ non è autovalore.
- Se $z = -1/n$ con n intero positivo, allora $x_k = 0$ $\forall k > n$. La successione $x^{(n)}$ di componenti

  $$x_k^{(n)} = \begin{cases} \prod_{j=1}^{k}(1 - j/n) & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

  appartiene a ℓ_2 ed è soluzione non banale dell'equazione $(-(1/n)I - T)x = 0$. Pertanto $z = -1/n$ è autovalore e $x^{(n)}$ è un corrispondente autovettore.
- Se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1/n, n = 1, 2, \dots\}$, allora $|x_k|$ diverge per $k \to \infty$ e $x \notin \ell_2$. Pertanto z non può essere un autovalore.

In conclusione, $\sigma_p(T) = \{-1/n,\ n = 1, 2, \dots\}$.
Poiché lo spettro è chiuso e $z = 0$ è punto di accumulazione di $\sigma_p(T)$ ma non è autovalore, deve essere $z \in \sigma_c(T)$.

Esercizio 6 Dopo averla disegnata, sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = |x - \mathrm{sgn}(x)|\,, \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

A cosa converge la serie così ottenuta nei punti $x = 0$, $x = \pm 1$ e $x = \pm\pi$?

[punteggio 5]

Poiché $f(-x) = f(x)$ deve essere $b_k = 0$ per $k = 1, 2, \ldots$. I coefficienti di $\cos(kx)$ valgono

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos(kx)dx + \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}(x-1)\cos(kx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k} - \frac{\cos(kx)}{k^2} - \frac{x\sin(kx)}{k}\right]_0^1 \\
&\quad + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x\sin(kx)}{k} - \frac{\sin(kx)}{k}\right]_1^{\pi} \\
&= \frac{2(1 - 2\cos(k) + \cos(k\pi))}{\pi k^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)dx + \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}(x-1)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(1-x)^2}{2}\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^{\pi} \\
&= \frac{2 - 2\pi + \pi^2}{\pi}
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) \\
&\sim \frac{2 - 2\pi + \pi^2}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(1 - 2\cos(k) + \cos(k\pi))}{\pi k^2}\cos(kx)
\end{aligned}$$

La funzione f è continua in $(-\pi, \pi)$ e pari, pertanto il suo prolungamento periodico in $\mathbb{R}$ è una funzione continua in ogni punto. Segue che la serie di Fourier converge puntualmente a $f(x)$ $\forall x \in [-\pi, \pi]$. Nei punti $x = 0$, $x = \pm 1$ e $x = \pm\pi$ essa quindi converge rispettivamente a $f(0) = 1$, $f(\pm 1) = 0$ e $f(\pm\pi) = \pi - 1$.