MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2020/2021 – Prof. C. Presilla

Prova A4 – 12 luglio 2021

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità									

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

1 Sia ξ un operatore autoaggiunto e $|A\rangle$ un vettore non nullo, non normalizzato. Dimostrare che $|A\rangle$ è autovettore di ξ se e solo se $\Delta\xi = 0$, dove

$$\Delta\xi = \sqrt{\frac{\langle A|\xi^2|A\rangle}{\langle A|A\rangle} - \left(\frac{\langle A|\xi|A\rangle}{\langle A|A\rangle}\right)^2}.$$

[punteggio 4]

2 Dimostrare che le autofunzioni di un operatore Hamiltoniano unidimensionale

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$$

possono sempre essere scelte reali.

[punteggio 4]

3 L'energia cinetica media degli atomi di idrogeno contenuti nell'atmosfera di una stella è $E_{\mathrm{cin}} = 1.0$ eV. Assumendo che l'atmosfera sia all'equilibrio termico, quanto è la sua temperatura misurata in Kelvin? Si ricorda che la costante di Boltzmann vale $k_{\mathrm{B}} = 1.38 \times 10^{-23}\mathrm{JK}^{-1}$.

[punteggio 4]

4 Una particella di massa m è vincolata a muoversi lungo l'asse x sotto l'influenza del potenziale $V(x) = V_0(x) + V_1(x)$ dove

$$V_0(x) = \begin{cases} +\infty, & |x| > a/2, \\ 0, & |x| < a/2, \end{cases} \qquad V_1(x) = -\lambda\delta(x),$$

con $a > 0$ e $\lambda > 0$. Determinare:
1) le condizioni di raccordo delle autofunzioni di H nei punti $x = \pm a/2$ e $x = 0$.
2) gli autovalori negativi di H e le rispettive autofunzioni discutendo il numero di queste soluzioni al variare dei parametri λ, a e m;
3) il valore di aspettazione della quantità di moto negli autostati corrispondenti.
Suggerimento: poiché $V(x)$ è pari conviene cercare autofunzioni di parità definita.

[punteggio 7]

---

5 Una particella di spin 1/2 e massa m è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R e la sua Hamiltoniana è

$$H = \frac{L^2}{2mR^2} + \omega L_z,$$

dove $\boldsymbol{L}$ è l'operatore di momento angolare orbitale e il parametro ω è reale. Determinare:
1) autovalori e autovettori di H;
2) il più generale stato $|\psi\rangle$ del sistema tale che:

a) una misura di J^2, dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ con $\boldsymbol{S}$ operatore di spin della particella, fornisce con certezza il valore $15\hbar^2/4$,

b) una misura di L^2 fornisce con certezza un valore maggiore di $3\hbar^2$,

c) una misura di J_z fornisce con certezza un valore negativo,

d) il valore di aspettazione del momento angolare orbitale lungo l'asse z è $-6\hbar/5$;

3) la probabilità di misurare il valore $S_z = \hbar/2$ nello stato $|\psi(t)\rangle$, evoluzione temporale al tempo t dello stato $|\psi\rangle$ del punto 2).

[punteggio 7]

---

6 Un gas di fermioni a spin 1/2, non interagenti, è vincolato in un segmento unidimensionale di lunghezza L. Assumendo che il gas si trovi a temperatura nulla, determinare:
1) il numero di stati di singola particella $\mathcal{N}(\epsilon)$ con energia minore o uguale a ϵ;
2) l'energia di Fermi ϵ_{F} in funzione del numero di particelle N contenute nel gas;
3) la densità degli stati;
4) il rapporto E/ϵ_{F} tra l'energia del gas di N particelle e la corrispondente energia di Fermi.
5) Scrivere una disuguaglianza del tipo $T \ll \ldots$ per cui possa considerarsi valida l'approssimazione di temperatura nulla.

[punteggio 7]

Esercizio (1)

Se $\xi |A\rangle = \xi_A |A\rangle$ allora $\xi^2 |A\rangle = \xi_A^2 |A\rangle$

e quindi $\langle A|\xi|A\rangle = \xi_A \langle A|A\rangle$

$$\langle A|\xi^2|A\rangle = \xi_A^2 \langle A|A\rangle$$

cioè $$(\Delta\xi)^2 = \frac{\langle A|\xi^2|A\rangle}{\langle A|A\rangle} - \left(\frac{\langle A|\xi|A\rangle}{\langle A|A\rangle}\right)^2 = \xi_A^2 - \xi_A^2 = 0$$

Viceversa, se $\Delta\xi = 0$ si ha

$$0 = (\Delta\xi)^2 = \frac{1}{\langle A|A\rangle} \langle A| \left(\xi - \frac{\langle A|\xi|A\rangle}{\langle A|A\rangle}\right)^2 |A\rangle$$

$$= \frac{1}{\langle A|A\rangle} \langle A| \left(\xi - \frac{\langle A|\xi|A\rangle}{\langle A|A\rangle}\right)^{+} \left(\xi - \frac{\langle A|\xi|A\rangle}{\langle A|A\rangle}\right) |A\rangle$$

$$= \frac{1}{\| |A\rangle \|^2} \left\| \left(\xi - \frac{\langle A|\xi|A\rangle}{\langle A|A\rangle}\right) |A\rangle \right\|^2$$

cioè $\left(\xi - \frac{\langle A|\xi|A\rangle}{\langle A|A\rangle}\right) |A\rangle = 0$

ovvero $\xi |A\rangle = \xi_A |A\rangle$ con $\xi_A = \frac{\langle A|\xi|A\rangle}{\langle A|A\rangle}$

Esercizio 2

Si consideri l'eq. di Schrödinger stazionaria $H\psi_E = E\psi_E$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)\psi_E(x) = E\,\psi_E(x)$$

Poiché $H=H^\dagger$ si ha $E\in\mathbb{R}$ e quindi l'equazione risulta essere una eq. differenziale a coefficienti reali. Di conseguenza se $\psi_E(x)$ è soluzione anche $\overline{\psi_E(x)}$ lo è. Per la linearità dell'equazione, anche

$$\mathrm{Re}\,\psi_E(x) = \left(\psi_E(x)+\overline{\psi_E(x)}\right)\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Im}\,\psi_E(x) = \left(\psi_E(x)-\overline{\psi_E(x)}\right)\frac{1}{2i}$$

sono soluzioni.

Questa coppia di soluzioni linearmente indipendenti sono le due autofunzioni reali dell'eq. $H\psi_E = E\psi_E$

Esercizio 3

All'equilibrio termico a temperatura T si ha

$$E_{cin} = \frac{3}{2} k_B T$$

Dunque

$$T = \frac{2}{3} \frac{E_{cin}}{k_B} = \frac{2}{3} \frac{1.0 \times 1.6\ 10^{-19}\ J}{1.38\ 10^{-23}\ J/K}$$

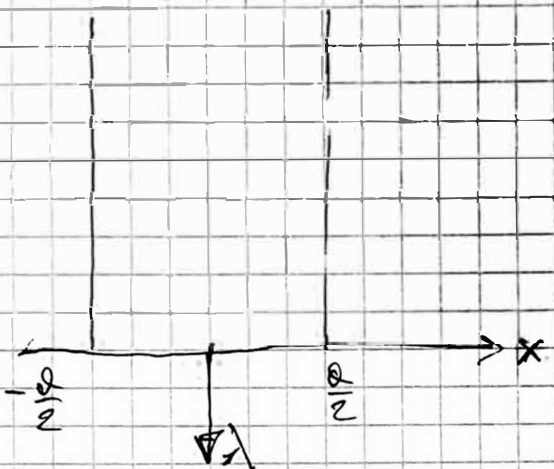
$$= \frac{2}{3} \frac{1.6}{1.38}\ 10^{4}\ K$$

$$= 7.7\ 10^{3}\ K$$

SE1D con potenziale

$$V(x) = V_0(x) + V_1(x) \qquad V_0(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ \infty & |x| > \frac{a}{2} \end{cases} \qquad a > 0$$

$$V_1(x) = -\lambda\, \delta(x) \qquad \lambda > 0$$



$$\psi''_E(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)\psi_E(x)$$

$E<0$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} A e^{kx} + A' e^{-kx} & -\frac{a}{2} < x < 0 \\ B e^{kx} + B' e^{-kx} & 0 < x < \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$k \equiv \frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar}$$

$$\begin{cases} \psi_E\left(\pm\frac{a}{2}\right) = 0 \\ \psi_E(0^+) = \psi_E(0^-) \\ \psi'_E(0^+) - \psi'_E(0^-) = -\lambda \frac{2m}{\hbar^2}\psi_E(0) \end{cases} \qquad \begin{cases} A e^{-\frac{a}{2}k} + A' e^{k\frac{a}{2}} = 0 \\ B e^{k\frac{a}{2}} + B' e^{-k\frac{a}{2}} = 0 \\ A + A' = B + B' \\ k(B - B') - k(A - A') = -\lambda\frac{2m}{\hbar^2}(A + A') \end{cases}$$

$[H, P] = 0$ $\quad P =$ operatore di parità

segue che le autofunzioni di autovalori non degeneri sono necessariamente pari o dispari

ψ_E pari $\quad A = B' \quad A' = B \quad$ Il sistema di condizioni si riduce a

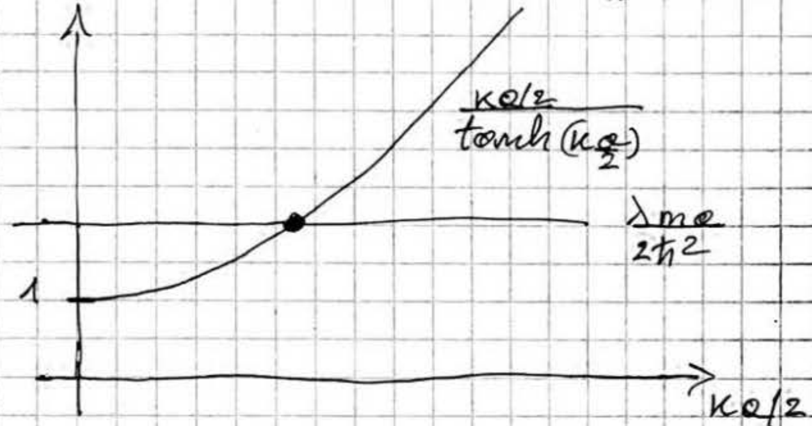
$$\begin{cases} Ae^{-\kappa\frac{a}{2}} + Be^{\kappa\frac{a}{2}} = 0 \\ 2\kappa(B-A) = -\lambda\frac{2m}{\hbar^2}(A+B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -Ae^{-\kappa a} \\ -2\kappa A\left(e^{-\kappa a}+1\right) = -\lambda\frac{2m}{\hbar^2}A\left(1-e^{-\kappa a}\right) \end{cases}$$

dovendo essere $A \neq 0$ abbiamo soluzione solo se

$$2\kappa\cosh\left(\kappa\frac{a}{2}\right) = \lambda\frac{2m}{\hbar^2}\sinh\left(\kappa\frac{a}{2}\right)$$

cioè $\quad \frac{\kappa a}{2}\Big/\tanh\left(\kappa\frac{a}{2}\right) = \frac{\lambda m a}{2\hbar^2}$



ψ_E dispari $\quad B' = -A \quad A' = -B$

$$\begin{cases} Ae^{-\kappa\frac{a}{2}} - Be^{\kappa\frac{a}{2}} = 0 \\ A-B = B-A \\ \kappa(B+A) - \kappa(A+B) = -\lambda\frac{2m}{\hbar^2}(A-B) \end{cases}$$

segue $\quad A=B \quad$ e

$A\sinh\left(\frac{\kappa a}{2}\right) = 0 \quad$ cioè $\kappa = 0$ che da $\psi_{E=0}(x) \equiv 0$

Conclusione: per $E<0$ c'è 1 solo autostato pari ammesso che $\frac{ma\lambda}{2\hbar^2} > 1$ altrimenti nessuno.

$B = -A e^{-ka}$ $\quad$ A costante di normalizzazione

$$\psi_E(x) = \begin{cases} A e^{kx} - A e^{-ka} e^{-kx} & -\frac{a}{2} < x < 0 \\ A e^{-kx} - A e^{-ka} e^{kx} & 0 < x < \frac{a}{2} \end{cases}$$

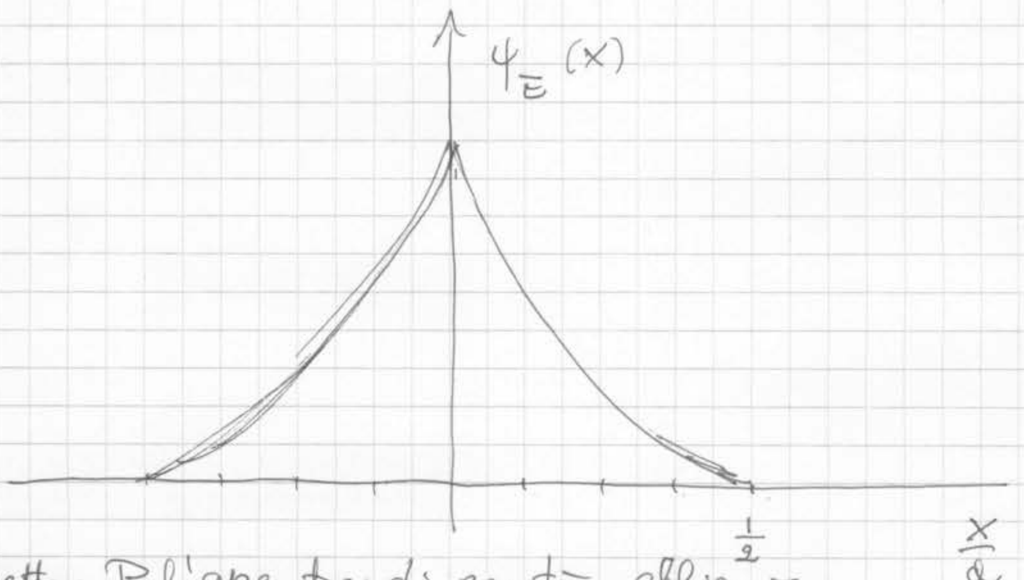
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_E(x)|^2 = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} |A|^2 \left(e^{-kx} - e^{k(x-a)}\right)^2 dx$$

$$= 2|A|^2 \left(\frac{e^{-2kx}}{-2k} + \frac{e^{2k(x-a)}}{2k} - 2 e^{-ka} x \right)\Bigg|_0^{\frac{a}{2}}$$

$$= 2|A|^2 \left(\cancel{\frac{e^{-ka}}{-2k}} + \frac{1}{2k} + \cancel{\frac{e^{-ka}}{2k}} - \frac{e^{-2ka}}{2k} - 2e^{-ka}\frac{a}{2} \right)$$

$$= |A|^2 \frac{1}{k} \left(1 - e^{-ka2} - 2ka\, e^{-ka} \right)$$

$$A = \sqrt{\frac{k}{1 - e^{-2ka} - 2ka\, e^{-ka}}}$$



Detto P l'operatore di parità, abbiamo

$$\langle \psi_E | p | \psi_E \rangle = \langle \psi_E | P^\dagger P\, p\, P^\dagger P | \psi_E \rangle = \langle \psi_E | (-p) | \psi_E \rangle$$

$$= -\langle \psi_E | p | \psi_E \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \psi_E | p | \psi_E \rangle = 0$$

Esercizio 5

Risulta $[H, L^2] = [H, L_z] = [H, S_z] = 0$ pertanto

gli stati $|l, m, \pm\rangle = |l, m\rangle |\pm\rangle$ sono gli autostati di H con

$L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle$

$L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$

$S_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$

I corrispondenti autovalori sono $E_{lm} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2} + \hbar\omega m$

degeneri rispetto all'indice di spin $\pm$ (degenerazione 2)

Determiniamo $|\psi\rangle$

a) $|\psi\rangle$ è autostato di J^2 con indice $j = \frac{3}{2}$
cioè autovalore $j(j+1)\hbar^2 = \frac{15}{4}\hbar^2$

b) poiché $|l - \frac{1}{2}| \leq j \leq |l + \frac{1}{2}|$ per avere $j = \frac{3}{2}$ deve aversi necessariamente $l = 1$ o $l = 2$. Solo il valore $l = 2$ è compatibile con un autostato di L^2 con autovalore maggiore di $3\hbar^2$ $(1(1+1)\hbar^2 = 2\hbar^2,\ 2(2+1)\hbar^2 = 6\hbar^2)$

c) Poiché $j = \frac{3}{2}$ possiamo avere $j_z = -\frac{1}{2}$ e $j_z = -\frac{3}{2}$

Dai punti a), b) e c) nella base $|l\, s\, j\, j_z\rangle$ possiamo avere

$|\psi\rangle = a\, |2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + b\, |2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$

con condizione di normalizzazione $|a|^2 + |b|^2 = 1$

Esercizio 5

Risulta $[H, L^2] = [H, L_z] = [H, S_z] = 0$ pertanto

gli stati $|l, m, \pm\rangle = |l, m\rangle\, |\pm\rangle$ sono gli autostati di H con

$$L^2\, |l, m\rangle = \hbar^2\, l(l+1)\, |l, m\rangle$$

$$L_z\, |l, m\rangle = \hbar m\, |l, m\rangle$$

$$S_z\, |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2}\, |\pm\rangle$$

I corrispondenti autovalori sono $E_{lm} = \dfrac{\hbar^2\, l(l+1)}{2mR^2} + \hbar\omega m$

degeneri rispetto all'indice di spin $\pm$ (degenerazione 2)

Determiniamo $|\psi\rangle$

a) $|\psi\rangle$ è autostato di J^2 con indice $j = \frac{3}{2}$ cioè autovalore $j(j+1)\hbar^2 = \frac{15}{4}\hbar^2$

b) poiché $|l - \frac{1}{2}| \leq j \leq |l + \frac{1}{2}|$ per avere $j = \frac{3}{2}$ deve aversi necessariamente $l = 1$ o $l = 2$. Solo il valore $l = 2$ è compatibile con un autostato di L^2 con autovalore maggiore di $3\hbar^2$ $(1(1+1)\hbar^2 = 2\hbar^2,\ 2(2+1)\hbar^2 = 6\hbar^2)$

c) Poiché $j = \frac{3}{2}$ possiamo avere $j_z = -\frac{1}{2}$ e $j_z = -\frac{3}{2}$

Dai punti a), b) e c) nella base $|l\, s\, j\, j_z\rangle$ possiamo avere

$$|\psi\rangle = a\, |2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + b\, |2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\rangle$$

con condizione di normalizzazione $|a|^2 + |b|^2 = 1$

d) trasformando lo stato $|\psi\rangle$ così ottenuto nella base $|l, m, s, s_z\rangle$ abbiamo

$$|\psi\rangle = a\,|l=2\ s=\tfrac{1}{2}\ j=\tfrac{3}{2}\ j_z=-\tfrac{1}{2}\rangle + b\,|l=2\ s=\tfrac{1}{2}\ j=\tfrac{3}{2}\ j_z=-\tfrac{3}{2}\rangle$$

$$= a\sqrt{\tfrac{2}{5}}\,|l=2\ m=0\ s=\tfrac{1}{2}\ s_z=-\tfrac{1}{2}\rangle - a\sqrt{\tfrac{3}{5}}\,|l=2\ m=-1\ s=\tfrac{1}{2}\ s_z=\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$+ b\sqrt{\tfrac{1}{5}}\,|l=2\ m=-1\ s=\tfrac{1}{2}\ s_z=-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{4}{5}}\,b\,|l=2\ m=-2,\ s=\tfrac{1}{2}\ s_z=\tfrac{1}{2}\rangle$$

quindi

$$\langle\psi|L_z|\psi\rangle = |a|^2\tfrac{2}{5}\,0\hbar + |a|^2\tfrac{3}{5}(-\hbar) + |b|^2\tfrac{1}{5}(-\hbar) + \tfrac{4}{5}|b|^2(-2\hbar)$$

$$= \left(-\tfrac{3}{5}|a|^2 - \tfrac{9}{5}|b|^2\right)\hbar$$

$$= -\tfrac{6}{5}\hbar$$

Abbiamo perciò

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = 1 \\ |a|^2 + 3|b|^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2|b|^2 = 1 \qquad \begin{matrix} |b|^2 = \tfrac{1}{2} \\ |a|^2 = \tfrac{1}{2} \end{matrix}$$

e quindi, a meno di un fattore di fase globale,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|l=2\ s=\tfrac{1}{2}\ j=\tfrac{3}{2}\ j_z=-\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\,|l=2\ s=\tfrac{1}{2}\ j=\tfrac{3}{2}\ j_z=-\tfrac{3}{2}\rangle$$

è lo stato più generale che soddisfa a) b) c) d)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\Big(\frac{1}{\sqrt5}|l=2\ m=0\ s=\tfrac12\ s_z=-\tfrac12\rangle$$

$$-\sqrt{\frac{3}{10}}|l=2\ m-1\ s=\tfrac12\ s_z=\tfrac12\rangle$$

$$+e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{10}}|l=2\ m=-1\ s=\tfrac12\ s_z=-\tfrac12\rangle$$

$$-e^{i\varphi}\sqrt{\frac{2}{5}}|l=2\ m=-2\ s=\tfrac12\ s_z=\tfrac12\rangle\Big)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\Big(\frac{1}{\sqrt5}|2\ 0\ -\rangle - \sqrt{\frac{3}{10}}|2\ -1\ +\rangle$$

$$+e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{10}}|2\ -1\ -\rangle - e^{i\varphi}\sqrt{\frac{2}{5}}|2\ -2\ +\rangle\Big)$$

$$= e^{-i\frac{3\hbar}{mR^2}t}\Big(\frac{1}{\sqrt5}|2\ 0\ -\rangle - \sqrt{\frac{3}{10}}e^{i\omega t}|2\ -1\ +\rangle$$

$$+e^{i\varphi}e^{i\omega t}\frac{1}{\sqrt{10}}|2-1-\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}e^{i\varphi}e^{i2\omega t}|2\ -2, +\rangle\Big)$$

La probabilità di misurare il valore $S_z = \frac{\hbar}{2}$
è pari a $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$ indipendente da t

$$P_+ = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left|\langle l\,m\,+|\psi(t)\rangle\right|^2$$

poiché $|\psi(t)\rangle$ è normalizzato

Esercizio (6)

$\mathcal{N}(\varepsilon)$ = numero di stati di singole particelle con energia $\leq \varepsilon$

$$= \frac{2}{h}\int_0^L dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \;\theta\left(\varepsilon - \frac{p_x^2}{2m}\right)$$

$$= \frac{2}{h}\, L \int_{-\sqrt{2m\varepsilon}}^{+\sqrt{2m\varepsilon}} dp_x$$

$$= \frac{2}{h}\, L \; 2\sqrt{2m\varepsilon}$$

$$= \frac{4L}{h}\sqrt{2m\varepsilon}$$

$$\mathcal{N}(\varepsilon_F) = N \quad \Rightarrow \quad 2m\varepsilon_F = \left(\frac{h}{4L}N\right)^2$$

$$\varepsilon_F = \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{4L}\right)^2 N^2$$

$\frac{d\mathcal{N}(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ = densità degli stati

$$= \frac{4L}{h}\sqrt{2m}\;\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{2L}{h}\sqrt{\frac{2m}{\varepsilon}}$$

$$E = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{d\mathcal{N}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\,\varepsilon\, d\varepsilon$$

$$= \int_0^{\varepsilon_F} \frac{2L}{h}\sqrt{2m\varepsilon}\; d\varepsilon$$

$$= \frac{2L}{h}\sqrt{2m}\;\frac{2}{3}\varepsilon_F^{3/2}$$

$$= \frac{2L}{h}\cancel{\sqrt{2m}}\;\frac{2}{3}\;\frac{1}{\cancel{\sqrt{2m}}}\left(\frac{h}{4L}\right) N \quad \varepsilon_F = \frac{1}{3}\varepsilon_F N$$

La funzione di distribuzione di Fermi-Dirac può essere approssimata con una funzione a gradino (temperatura nulla) quando

$K_B T << \varepsilon_F$