Corso di Laurea in Scienze Biologiche
Matematica per Biologia
a.a. 2025-2026

Prova scritta della seconda verifica, 09/02/2026

Compilare i seguenti dati in STAMPATELLO.

Nome:

Cognome:

Matricola:

Regolamento della prova

- La durata della prova sarà di **2 ore**.
- Per l'intera durata della prova, i telefoni cellulari e altri dispositivi elettronici dotati di connessione alla rete telefonica e/o internet dovranno rimanere **rigorosamente spenti**.
- Durante la prova **non è consentito utilizzare e consultare materiale di supporto didattico** (appunti, libri di testo, etc.) **né utilizzare la calcolatrice**.
- Le risposte corrette valgono un numero di punti **massimo** riportato accanto al testo della domanda. Una risposta omessa varrà automaticamente **0 punti**. Il punteggio massimo complessivo che si può conseguire è **33 punti**. La prova si considera **superata** se si consegue un punteggio pari o superiore a **18 punti**.
- **Farà fede solo quanto scritto nel compito**, che viene riconsegnato nella sua interezza alla fine della prova: il docente non accetterà fogli di "brutta" per la correzione.

Buon lavoro!

Esercizio 1 (5 punti). Un gruppo di biologi marini monitora la numerosità di una popolazione di foche grigie (*Halichoerus grypus*) in una riserva naturale costiera. Si osserva che la taglia della popolazione è ben approssimata dalla successione

$$15 + \frac{n^2 - 2n + 1}{1 - e^{-n}}$$

dove $n \geq 1$ è il tempo, misurato in mesi, trascorso dall'inizio dell'osservazione.
Stabilire il comportamento asintotico della taglia della popolazione.

Svolgimento.

Per stabilire il comportamento asintotico della taglia della popolazione dobbiamo calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} 15 + \frac{n^2 - 2n + 1}{1 - e^{-n}} = 15 + \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1 - 2/n + 1/n^2)}{1 - e^{-n}} \,.$$

Poiché le successioni $2/n$ e $1/n^2$ sono infinitesime il numeratore della frazione è asintoticamente equivalente ad n^2, in particolare diverge a $+\infty$, al contrario il denominatore tende a 1 poiché la successione e^{-n} converge a 0 . Ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty} 15 + \frac{n^2 - 2n + 1}{1 - e^{-n}} = +\infty \,.$$

Concludiamo quindi che la taglia della popolazione è asintoticamente divergente.

Esercizio 2 (6 punti). Determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali massimi e minimi relativi e assoluti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{e^{\frac{x}{2}}}.$$

Svolgimento.

Per trovare gli intervalli di monotonia della funzione f ne calcoliamo la derivata e ne studiamo il segno. Ricordiamo la regola di derivazione del rapporto di due funzioni:

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{f_2(x)^2}$$

dove $f_1(x) = x^2 - 5$ e $f_2(x) = e^{x/2}$.
Otteniamo

$$f'(x) = \frac{2xe^{x/2} - (x^2 - 5)\frac{1}{2}e^{x/2}}{e^x} = \frac{-x^2 + 4x + 5}{2e^{x/2}}$$

dove abbiamo usato la regola di derivazione per funzioni composte per calcolare $f_1'(x) = 2x$ e $f_2'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$. Poiché l'esponenziale è sempre positivo abbiamo

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 \geq 0$$

La parabola di equazione $y(x) = -x^2+4x+5$ ha la concavità rivolta verso il basso ed interseca l'asse delle ascisse in $x = -1$ e $x = 5$, quindi

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5.$$

Concludiamo quindi che la funzione $f(x)$ è monotona decrescente per $x \leq -1$ e $x \geq 5$ ed è invece monotona crescente per $-1 \leq x \leq 5$. Ne segue che $x = -1$ è un punto di minimo relativo, con minimo relativo dato da $f(-1) = -4\sqrt{e}$; inoltre $x = 5$ è un punto di massimo relativo e il massimo relativo è $f(5) = \frac{20}{e^{5/2}}$.
Per stabilire se si tratta anche di punti di massimo e minimo assoluti consideriamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio. Abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 5}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1 - \frac{5}{x^2})}{e^{\frac{x}{2}}} = +\infty$$

avendo usato l'algebra dei limiti, il fatto che il numeratore diverge a $+\infty$ e che il denominatore tende a 0^+ per $x \to -\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 5}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1 - \frac{5}{x^2})}{e^{\frac{x}{2}}}$$

quindi, ricordando che l'esponenziale è un infinito di ordine superiore a qualunque potenza per $x \to +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1 - \frac{5}{x^2})}{e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

Pertanto ne segue che $x = -1$ è un punto di minimo assoluto mentre $x = 5$ è un punto di massimo relativo ma non assoluto.

Esercizio 3 (5 punti). Dai dati raccolti in un studio è emerso che il 40% degli intervistati consuma alcol occasionalmente, il 20% consuma alcol abitualmente ed i rimanenti si dichiarano astemi. Sapendo che tra i consumatori di alcol (occasionali o abituali) il 10% soffre di emicranie e che tra le persone astemie il 5% soffre di emicranie, stabilire se soffrire di emicranie ed essere astemi sono eventi indipendenti.

Svolgimento.

Indicando con A l'evento "essere bevitori occasionali" e con B l'evento "essere bevitori abituali" abbiamo

$$P(A) = 0,4\,, \qquad P(B) = 0,2\,,$$

inoltre, poiché sono A e B sono eventi disgiunti, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,6$.
Denotando con C l'evento complementare di $A \cup B$ ovvero l'evento "essere astemi", abbiamo quindi

$$P(C) = 1 - P(A \cup B) = 0,4.$$

Indichiamo con E l'evento "soffrire di emicrania". Dai dati forniti sappiamo che

$$P(E|(A \cup B)) = 0,1 \qquad \text{e} \qquad P(E|C) = 0,05.$$

Per stabilire se gli eventi E e C sono indipendenti vogliamo verificare se $P(E \cap C) = P(E)P(C)$.
Poiché $P(E \cap C) = P(E|C)P(C)$ sarà equivalente verificare se $P(E|C) = P(E)$.
A tale scopo utilizziamo la formula della probabilità totale per calcolare

$$P(E) = P(E|(A \cup B))P(A \cup B) + P(E|C)P(C) = \frac{10}{100} \cdot \frac{60}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{600 + 200}{10000} = \frac{8}{100} = 0,08.$$

Poiché

$$P(E) = 0,08 \neq 0,05 = P(E|C)$$

concludiamo che gli eventi C ed E non sono indipendenti.

Esercizio 4 (6 punti). Trovare la primitiva $F(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{3x+1}$$

tale che $F(0) = 2$.

Svolgimento.

Per trovare la primitiva cercata calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{3x+1}dx\,.$$

Procediamo per sostituzione ponendo $t = 3x + 1$ da cui segue $dt = 3dx$.
Otteniamo

$$\int \frac{1}{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{3}\ln|t| + c\,.$$

Tornando alla variabile x concludiamo che le primitive di f sono della forma

$$\int f(x)dx = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + c$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$. Per stabilire il valore della costante c imponiamo la condizione $F(0) = 2$:

$$2 = F(0) = \frac{1}{3}\ln(1) + c = c\,.$$

Concludiamo quindi che la primitiva cercata è

$$F(x) = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + 2\,.$$

Esercizio 5 (5 punti). Determinare, senza risolverlo, il numero di soluzioni del seguente sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + 3y = k \\ 36y + 8x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Svolgimento.

La prima equazione descrive la retta

$$y = -\frac{2}{9}x + \frac{k}{3},$$

la seconda equazione la retta

$$y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{72}.$$

Le due rette sono parallele (stesso coefficiente angolare $-2/9$), coincidenti per $k/3 = 1/72$ (stessa intercetta sull'asse y). Pertanto il sistema di due equazioni proposto ha infinite soluzioni per $k = 3/72 = 1/24$ e nessuna soluzione per ogni altro valore di k.

Esercizio 6 (6 punti). La persistenza della lattasi è un tratto genetico che permette agli adulti di digerire il lattosio (lo zucchero del latte) grazie alla continua produzione dell'enzima lattasi. In Corsica è noto che circa il 10% della popolazione adulta possiede la lattasi persistente.
Qual è la probabilità che, scegliendo a caso 4 individui adulti, almeno uno sia lattasi persistente? Quanti individui che possiedono la lattasi persistente ci si aspetta di osservare in media in un gruppo di 50 adulti?

Svolgimento.

Indichiamo con $p = 0,1$ la probabilità che un individuo scelto a caso dalla popolazione adulta della Corsica sia lattasi persistente. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di individui che presentano la lattasi persistente tra 4 individui adulti scelti a caso. X ha distribuzione binomiale di parametri $n = 4$ e $p = 0,1$, ovvero

$$P(X = k) = \binom{4}{k}(0,1)^k(0,9)^{4-k}, \qquad k = 0,1,\dots,4\,.$$

Ne segue che

$$P(\text{“almeno un individuo dei quattro presenta la lattasi persistente''}) = P(X \geq 1)\,.$$

Passando alla probabilità dell'evento complementare otteniamo

$$\begin{aligned} P(\text{“almeno un individuo dei quattro presenta la lattasi persistente''}) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - (0,9)^4 \simeq 34\%\,. \end{aligned}$$

Denotiamo ora con Y la variabile che descrive il numero di individui che presentano la lattasi persistente tra 50 individui adulti scelti a caso, avremo che Y ha distribuzione binomiale di parametri $n = 50$ e $p = 0,1$. Ne segue che in media il numero di individui che possiedono la lattasi persistente in un gruppo di 50 adulti è

$$E(Y) = n \cdot p = 50 \cdot \frac{10}{100} = 5\,.$$