

Corso di Laurea in Scienze Biologiche
Matematica per Biologia
a.a. 2025-2026

Prova scritta della quarta verifica, 13/07/2026

Compilare i seguenti dati in STAMPATELLO.

Nome:

Cognome:

Matricola:

Regolamento della prova

- La durata della prova sarà di **2 ore**.
 - Per l'intera durata della prova, i telefoni cellulari e altri dispositivi elettronici dotati di connessione alla rete telefonica e/o internet dovranno rimanere **rigorosamente spenti**.
 - Durante la prova **non è consentito utilizzare e consultare materiale di supporto didattico** (appunti, libri di testo, etc.) **né utilizzare la calcolatrice**.
 - Le risposte corrette valgono un numero di punti **massimo** riportato accanto al testo della domanda. Una risposta omessa varrà automaticamente **0 punti**. Il punteggio massimo complessivo che si può conseguire è **33 punti**. La prova si considera **superata** se si consegue un punteggio pari o superiore a **18 punti**.
 - **Farà fede solo quanto scritto nel compito**, che viene riconsegnato nella sua interezza alla fine della prova: il docente non accetterà fogli di "brutta" per la correzione.
-

Buon lavoro!

Funzione di distribuzione cumulativa (CDF) di variabile aleatoria normale standard

Tabella di $F(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$ per $0 \leq z \leq 3$ a passi di 0.01

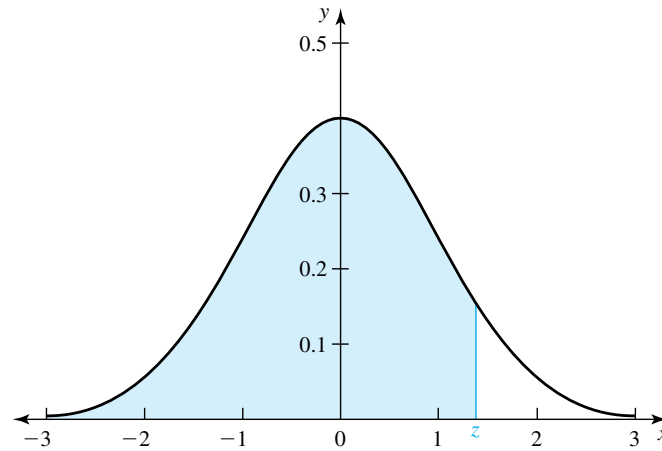


Figure B.1 Areas under the standard normal curve from $-\infty$ to z .

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986

Esercizio 1 (6 punti). Determinare il dominio e gli asintoti orizzontali e verticali (qualora presenti) della funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x^2 - 3x + 2}$$

Svolgimento.

Dominio: Si tratta di una funzione razionale, il denominatore deve essere diverso da zero. Risolviamo l'equazione associata $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2},$$

ottenendo le due radici $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Pertanto, il dominio massimale di f è

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty).$$

Asintoti Orizzontali: Calcoliamo il limite della funzione per $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 12}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 \left(1 - \frac{12}{3x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = 3.$$

La retta $y = 3$ è un asintoto orizzontale completo.

Asintoti Verticali: Analizziamo il comportamento della funzione nei punti esclusi dal dominio.

- Per $x \rightarrow 1$, il numeratore di f tende a $3(1)^2 - 12 = -9$, mentre il denominatore tende a 0.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Quindi la retta $x = 1$ è un asintoto verticale.

- Per $x \rightarrow 2$, sia il numeratore che il denominatore di f si annullano, portando alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scomponiamo i polinomi

$$f(x) = \frac{3(x^2 - 4)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{3(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}.$$

Poiché $x \neq 2$, possiamo semplificare i fattori $(x - 2)$ e ottenere

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x + 2)}{x - 1} = \frac{3(2 + 2)}{2 - 1} = 12.$$

Il limite è un valore reale finito, pertanto la retta $x = 2$ non è un asintoto verticale di f . La funzione presenta in $x = 2$ una discontinuità eliminabile.

Esercizio 2 (6 punti). Determinare, giustificando quanto si afferma, se i seguenti limiti esistono e calcolare l'eventuale loro valore

$$\text{a) } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\sin(\omega t)}, \quad \text{b) } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t+\sin(\omega t)}, \quad \text{c) } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t+\sin(\omega t)},$$

con ω costante reale.

Svolgimento.

a) Se $\omega = 0$, si ha $\sin(\omega t) = 0$ per ogni t e pertanto $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\sin(\omega t)} = 1$.

Se $\omega \neq 0$, si ha che

$$\nexists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\sin(\omega t)},$$

in quanto $e^{\sin(\omega t)}$ oscilla indefinitamente tra e^1 ed e^{-1} .

b) Per qualsiasi valore di $\omega \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t+\sin(\omega t)} = +\infty,$$

in quanto $e^{t+\sin(\omega t)} \geq e^{-1}e^t$ e il limite di e^t diverge ($\forall M > 0$ esiste t_0 tale che $e^t > M$ per ogni $t > t_0$).

c) Per qualsiasi valore di $\omega \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t+\sin(\omega t)} = 0,$$

in quanto $0 \leq e^{-t+\sin(\omega t)} \leq e^1 e^{-t}$ e il limite di e^{-t} converge a 0 ($\forall \epsilon > 0$ esiste t_0 tale che $0 < e^{-t} < \epsilon$ per ogni $t > t_0$).

Esercizio 3 (5 punti). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + a^2}, \quad a > 0.$$

Stabilire le eventuali simmetrie (parità o disparità) di f . Calcolare l'area della regione compresa tra la curva $y = f(x)$ e le rette $y = 0$, $x = -x_0$ e $x = x_0$, dove $x_0 = \sqrt{7}a$.

Svolgimento.

Poiché $|-x| = |x|$ e $(-x)^2 = x^2$, la funzione f risulta pari, $f(-x) = f(x)$.
L'area cercata vale

$$\begin{aligned} area &= \int_{-x_0}^{x_0} (f(x) - 0) dx \\ &= 2 \int_0^{x_0} \frac{x}{x^2 + a^2} dx \\ &= \int_0^{x_0} \frac{d \ln(x^2 + a^2)}{dx} dx \\ &= \ln(x^2 + a^2) \Big|_0^{x_0} \\ &= \ln(x_0^2 + a^2) - \ln(a^2) \\ &= \ln(x_0^2/a^2 + 1) \\ &= \ln 8 = 3 \ln 2. \end{aligned}$$

Esercizio 4 (5 punti). In un laboratorio di analisi, un macchinario automatizzato ha una probabilità del 15% di produrre un falso errore di lettura su un campione biologico. Calcolare la probabilità che il primo errore di lettura si verifichi dopo il 3° campione analizzato ma entro l'8° campione (8° incluso). Calcolare inoltre la probabilità che il primo errore di lettura si verifichi a partire dal decimo campione analizzato compreso.

Svolgimento.

Introduciamo la variabile aleatoria geometrica X , che rappresenta il numero di campioni analizzati fino al primo errore di lettura. I parametri sono la probabilità di successo (il verificarsi di un errore di lettura) $p = 0.15$ e la probabilità di insuccesso $q = 1 - p = 0.85$ con funzione massa di probabilità $P(X = k) = q^{k-1}p$.

Vogliamo calcolare la probabilità $P(3 < X \leq 8)$. Ricordiamo la proprietà della distribuzione geometrica relativa alla coda destra: $P(X > k) = q^k$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} P(3 < X \leq 8) &= P(X > 3) - P(X > 8) \\ &= (0.85)^3 - (0.85)^8. \end{aligned}$$

Per calcolare la probabilità $P(X \geq 10)$ possiamo usare la relazione

$$P(X \geq 10) = P(X > 9) = q^9 = (0.85)^9.$$

Dimostrazione, non richiesta, della formula $P(X > k) = q^k$

$$\begin{aligned} P(X > k) &= 1 - P(X \leq k) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^k P(X = j) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^k q^j p \\ &= 1 - p \sum_{n=0}^{k-1} q^n \\ &= 1 - p \frac{1 - q^k}{1 - q} \\ &= q^k \end{aligned}$$

Esercizio 5 (5 punti). Viene sperimentato un nuovo test diagnostico per una patologia che ha una prevalenza del 4% nella popolazione. Dai dati clinici emerge che il tasso di falsi negativi è pari al 5% (ovvero, il 5% dei malati risulta erroneamente negativo al test) e il tasso di falsi positivi è pari al 10% (il 10% dei sani risulta erroneamente positivo). Determinare il valore predittivo positivo (VPP) del test.

Svolgimento.

Definiamo gli eventi e le relative probabilità in base alle informazioni in nostro possesso:

- Test positivo (T^+), Test negativo (T^-)
- Malato (M): $P(M) = 0.04 \implies$ Sano (S): $P(S) = 1 - 0.04 = 0.96$
- Falsi Negativi: $P(T^-|M) = 0.05 \implies$ Sensibilità: $P(T^+|M) = 1 - 0.05 = 0.95$
- Falsi Positivi: $P(T^+|S) = 0.10$

Vogliamo determinare il Valore Predittivo Positivo, ossia $P(M|T^+)$. Utilizziamo il Teorema di Bayes

$$P(M|T^+) = \frac{P(T^+|M) \cdot P(M)}{P(T^+|M) \cdot P(M) + P(T^+|S) \cdot P(S)}.$$

Sostituiamo i valori numerici

$$P(M|T^+) = \frac{0.95 \cdot 0.04}{(0.95 \cdot 0.04) + (0.10 \cdot 0.96)} = \frac{0.038}{0.038 + 0.096} = \frac{0.038}{0.134} = \frac{38}{134} = \frac{19}{67} \simeq 0.2836.$$

Esercizio 6 (6 punti). Il peso corporeo di una popolazione di roditori in un ecosistema protetto segue una distribuzione normale con una media di 140 grammi e una deviazione standard di 20 grammi. Calcolare la percentuale di roditori che presenta un peso compreso tra i 120 grammi e i 180 grammi.

Svolgimento.

La variabile aleatoria peso corporeo è $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, con $\mu = 140$ e $\sigma = 20$. Dobbiamo calcolare $P(120 \leq X \leq 180)$. Standardizziamo i valori mediante la trasformazione $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$$Z_1 = \frac{120 - 140}{20} = -1,$$

$$Z_2 = \frac{180 - 140}{20} = 2,$$

e otteniamo $P(120 \leq X \leq 180) = P(Z_1 \leq Z \leq Z_2)$.

L'intervallo standardizzato è $(-1, 2)$ e la relativa probabilità ammonta a

$$P(-1 \leq Z \leq 2) = F(2) - F(-1),$$

dove $F(z)$ è la funzione di distribuzione cumulativa (CDF) di variabile aleatoria normale standard. Per le proprietà di simmetria della gaussiana standardizzata, $F(-1) = 1 - F(1)$, da cui

$$P(-1 \leq Z \leq 2) = F(2) + F(1) - 1.$$

Consultando la tavola allegata, troviamo $F(2) = 0.9772$ e $F(1) = 0.8413$ che sostituiti forniscono

$$P(120 \leq X \leq 180) = P(-1 \leq Z \leq 2) = 0.9772 + 0.8413 - 1 = 1.8185 - 1 = 0.8185$$

Poiché i valori standardizzati Z_1, Z_2 sono interi compresi tra -3 e 3 , alternativamente, si poteva giungere al risultato utilizzando la regola empirica 68-95-99.7

$$P(120 \leq X \leq 180) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu) + P(\mu \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.68/2 + 0.95/2 = 0.815$$