

**Corso di Laurea in Scienze Biologiche
Matematica per Biologia
a.a. 2025-2026**

Prova scritta della terza verifica, 15/06/2026

Compilare i seguenti dati in STAMPATELLO.

Nome:

Cognome:

Matricola:

Regolamento della prova

- La durata della prova sarà di **2 ore**.
 - Per l'intera durata della prova, i telefoni cellulari e altri dispositivi elettronici dotati di connessione alla rete telefonica e/o internet dovranno rimanere **rigorosamente spenti**.
 - Durante la prova **non è consentito utilizzare e consultare materiale di supporto didattico** (appunti, libri di testo, etc.) **né utilizzare la calcolatrice**.
 - Le risposte corrette valgono un numero di punti **massimo** riportato accanto al testo della domanda. Una risposta omessa varrà automaticamente **0 punti**. Il punteggio massimo complessivo che si può conseguire è **33 punti**. La prova si considera **superata** se si consegue un punteggio pari o superiore a **18 punti**.
 - **Farà fede solo quanto scritto nel compito**, che viene riconsegnato nella sua interezza alla fine della prova: il docente non accetterà fogli di "brutta" per la correzione.
-

Buon lavoro!

Esercizio 1 (6 punti). La concentrazione di un farmaco nel sangue dopo l'assunzione è modellata dalla funzione

$$C(t) = 60 + 40 t e^{-t/2}, \quad t \geq 0,$$

dove t è il tempo in ore trascorso dalla somministrazione. Dopo quanto tempo si raggiunge la concentrazione massima del farmaco? Qual è tale valore?

Svolgimento.

Deriviamo applicando la regola di prodotto:

$$C'(t) = 40 \left(e^{-t/2} - \frac{t}{2} e^{-t/2} \right) = 40 e^{-t/2} \left(1 - \frac{t}{2} \right).$$

Il fattore esponenziale è sempre positivo, quindi la derivata è positiva per $t \in [0, 2)$, nulla in $t = 2$ e negativa per $t > 2$. Pertanto il punto di massimo è $t = 2$. Calcoliamo il valore massimo: $C(2) = 60 + 40(2)e^{-2/2} = 60 + 80e^{-1}$.

Esercizio 2 (5 punti). Nel piano sono assegnati i vettori

$$\mathbf{u} = (3, 2), \quad \mathbf{v} = (-1, 4), \quad \mathbf{w} = (2, -1).$$

- a) Per quali valori del parametro reale μ il vettore $\mathbf{k} = \mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$ risulta ortogonale al vettore $\mathbf{w}$?
b) Calcolare la lunghezza del vettore $\mathbf{h} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.
-

Svolgimento.

a) Calcoliamo $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} = \mathbf{u} + \mu\mathbf{v} = (3, 2) + \mu(-1, 4) = (3 - \mu, 2 + 4\mu).$$

Imponiamo l'ortogonalità con $\mathbf{w} = (2, -1)$. Poiché

$$(3 - \mu, 2 + 4\mu) \cdot (2, -1) = 2(3 - \mu) - (2 + 4\mu) = 4 - 6\mu,$$

dobbiamo imporre $4 - 6\mu = 0$, da cui $\mu = \frac{2}{3}$.

b) Si ha $\mathbf{h} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 2) + (-1, 4) = (2, 6)$ e quindi $|\mathbf{h}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$.

Esercizio 3 (6 punti). Una variabile aleatoria continua X è definita sull'intervallo $[0, 3]$ con densità di probabilità

$$\rho(x) = \frac{2}{9}x, \quad x \in [0, 3].$$

- a) Calcolare la funzione di ripartizione (funzione di distribuzione cumulativa) $F(x)$ per $x \in [0, 3]$.
b) Calcolare la probabilità che X assuma valori maggiori di 2.
-

Svolgimento.

- a) La funzione di ripartizione è:

$$F(x) = \int_0^x \frac{2}{9}t \, dt = \frac{1}{9}x^2, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

- b) La probabilità che $X > 2$ è:

$$P(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{1}{9} \cdot 4 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Esercizio 4 (5 punti). In un call center, il numero medio di chiamate ricevute in un intervallo di un'ora è pari a $\lambda = 5$. Si assume che il numero di chiamate per ora segua una distribuzione di Poisson.

- a) Qual è la probabilità che in un'ora vengano ricevute esattamente 3 chiamate?
 - b) Qual è la probabilità che in un'ora vengano ricevute almeno 4 chiamate?
-

Svolgimento.

Poiché il numero di chiamate per ora segue una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 5$, la funzione di massa è $P(N = k) = e^{-5} \frac{5^k}{k!}$.

- a) Probabilità di ricevere esattamente 3 chiamate:

$$P(N = 3) = e^{-5} \frac{5^3}{3!} = e^{-5} \frac{125}{6}.$$

- b) Probabilità di ricevere almeno 4 chiamate:

$$P(N \geq 4) = 1 - P(N \leq 3) = 1 - \left[e^{-5} \left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} \right) \right] = 1 - e^{-5} \cdot \frac{118}{3}.$$

Esercizio 5 (6 punti). Determinare il dominio (massimale) e gli asintoti verticali e orizzontali, qualora presenti, della funzione

$$f(x) = \log(x^2 - 3x - 10).$$

Svolgimento.

La funzione logaritmica è definita solo quando l'argomento è positivo, quindi, essendo $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$, il dominio è

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 10 > 0\} = (-\infty, -2) \cup (5, +\infty).$$

Gli asintoti verticali si trovano ai bordi del dominio. Occorre verificare se la funzione diverge su tali bordi. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \log(0^+) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \log(0^+) = -\infty$$

Pertanto le rette verticali di equazione $x = -2$ e $x = 5$ sono asintoti verticali di f .

Eventuali asintoti orizzontali si determinano calcolando i limiti per $x \rightarrow \pm\infty$. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 3x - 10) = +\infty$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \log y = +\infty.$$

Quindi non ci sono asintoti orizzontali poiché la funzione diverge sia per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$.

Esercizio 6 (5 punti). Un test diagnostico ha sensibilità dell'85% e specificità dell'80%. Si sa inoltre che il 15% di una certa popolazione è affetto dalla malattia.

a) Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso nella popolazione risulti positivo al test?

b) Qual è la probabilità che un individuo risultato positivo al test sia effettivamente malato?

Svolgimento.

La sensibilità è $P(T^+ | M) = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$. La specificità è $P(T^- | M^c) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$, quindi la probabilità di falso positivo è

$$P(T^+ | M^c) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

La prevalenza è $P(M) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$, quindi $P(M^c) = \frac{17}{20}$.

a) Probabilità di risultare positivi:

$$P(T^+) = P(T^+ | M)P(M) + P(T^+ | M^c)P(M^c)$$

$$P(T^+) = \frac{17}{20} \cdot \frac{3}{20} + \frac{1}{5} \cdot \frac{17}{20} = \frac{119}{400}.$$

b) Probabilità di essere malati dato un test positivo:

$$P(M | T^+) = \frac{P(T^+ | M)P(M)}{P(T^+)} = \frac{\frac{17}{20} \cdot \frac{3}{20}}{\frac{119}{400}} = \frac{\frac{51}{400}}{\frac{119}{400}} = \frac{51}{119}.$$