

**Corso di Laurea in Scienze Biologiche**  
**Matematica per Biologia**  
**a.a. 2025-2026**

**Prova scritta della prima verifica, 26/01/2026 – Compito A**

Compilare i seguenti dati in STAMPATELLO.

Nome:

Cognome:

Matricola:

---

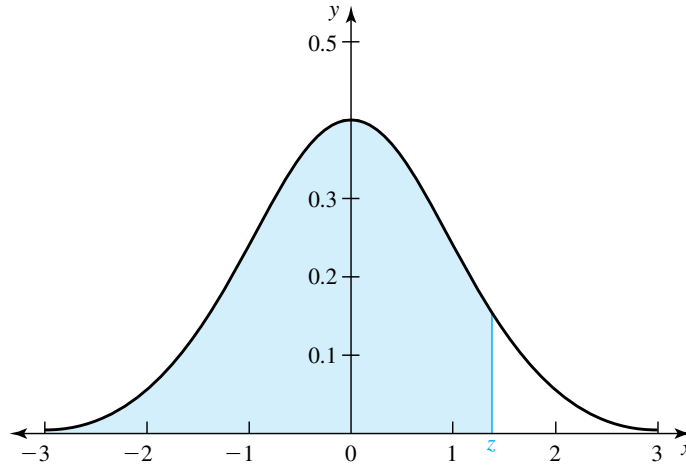
**Regolamento della prova**

- La durata della prova sarà di **2 ore**.
  - Per l'intera durata della prova, i telefoni cellulari e altri dispositivi elettronici dotati di connessione alla rete telefonica e/o internet dovranno rimanere **rigorosamente spenti**.
  - Durante la prova **non è consentito utilizzare e consultare materiale di supporto didattico** (appunti, libri di testo, etc.) **né utilizzare la calcolatrice**.
  - Le risposte corrette valgono un numero di punti **massimo** riportato accanto al testo della domanda. Una risposta omessa varrà automaticamente **0 punti**. Il punteggio massimo complessivo che si può conseguire è **33 punti**. La prova si considera **superata** se si consegue un punteggio pari o superiore a **18 punti**.
  - **Farà fede solo quanto scritto nel compito**, che viene riconsegnato nella sua interezza alla fine della prova: il docente non accetterà fogli di "brutta" per la correzione.
- 

**Buon lavoro!**

## Funzione di distribuzione cumulativa (CDF) di variabile aleatoria normale standard

Tabella di  $F(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$  per  $0 \leq z \leq 3$  a passi di 0.01



**Figure B.1** Areas under the standard normal curve from  $-\infty$  to  $z$ .

$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986

**Esercizio 1 (6 punti).** Determinare il dominio e gli asintoti orizzontali e verticali (qualora presenti) della funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-5x+6}.$$

**Svolgimento.**

Affinché la funzione  $f(x)$  risulti definita, occorre che il denominatore non si annulli. Dobbiamo quindi richiedere

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \iff x \neq 2 \vee x \neq 3.$$

Pertanto, il dominio della funzione risulta essere l'insieme

$$D = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty).$$

Ha senso considerare il comportamento asintotico all'infinito di  $f(x)$ . La funzione è rapporto di due espressioni polinomiali, e quindi divergenti: il numeratore ha ordine di infinito della potenza  $x$ , mentre il denominatore ha ordine di infinito della potenza  $x^2$ . Raccogliamo dalle espressioni a numeratore e a denominatore i corrispondenti ordini di infinito:

$$\frac{1-x}{x^2-5x+6} = \frac{x \left( \frac{1}{x} - 1 \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} \right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}.$$

Le espressioni  $1/x$ ,  $-5/x$  e  $6/x^2$  sono tutte infinitesime per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Pertanto, concludiamo che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} = 0 \cdot \frac{-1}{1} = 0.$$

La retta di equazione  $y = 0$  è quindi asintoto verticale destro e sinistro per il grafico della funzione  $f$ .

Occorre altresì studiare il comportamento asintotico della funzione vicino agli estremi finiti del dominio. Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x}{(x-2)(x-3)} = -\infty, & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{(x-2)(x-3)} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-x}{(x-2)(x-3)} = +\infty, & \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-x}{(x-2)(x-3)} = -\infty. \end{aligned}$$

Le rette di equazione  $x = 2$  e  $x = 3$  sono quindi asintoti verticali per il grafico della funzione  $f$ .

**Esercizio 2 (6 punti).** In un pronto soccorso, si stima che ogni giorno venga assegnato il “codice rosso” al 10% dei pazienti valutati nel triage. Determinare con che probabilità, in una giornata, viene assegnato per la prima volta il “codice rosso” a un paziente fra i primi 7 visitati (7 incluso).

---

### Svolgimento.

Chiamiamo  $X$  la variabile aleatoria che conta dopo quanti pazienti viene assegnato il primo “codice rosso”: tale variabile ha distribuzione geometrica

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{10}, \quad k \in \{1, 2, \dots\},$$

essendo  $p = 10\% = 1/10$  la probabilità di assegnazione del “codice rosso”. La probabilità richiesta è determinata quindi come

$$\begin{aligned} P(X \leq 7) &= \sum_{k=1}^7 \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{10} = \left[ \sum_{n=0}^6 \left(\frac{9}{10}\right)^n \right] \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^7}{1 - \frac{9}{10}} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^7 \simeq 52\%. \end{aligned}$$

Alternativamente, dette  $X_1, X_2, \dots, X_7$  le variabili aleatorie di Bernoulli che esprimono se il paziente  $k$ -esimo ha codice rosso ( $X_k = 1$ ) oppure no ( $X_k = 0$ ) e posto  $S_7 = X_1 + X_2 + \dots + X_7$ , dalla distribuzione Binomiale abbiamo  $P(S_7 = 0) = (9/10)^7$  e quindi

$$P(X \leq 7) = 1 - P(S_7 = 0) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^7 \simeq 52\%.$$

**Esercizio 3 (5 punti).** Riportando le misurazioni della numerosità di una coltura batterica in un grafico in scala logaritmica (in base 10), si ottiene una retta di pendenza 0.3. Sapendo che la popolazione iniziale consisteva di 200 batteri, scrivere la legge  $N(t)$  che descrive la numerosità della popolazione batterica al tempo  $t \geq 0$ .

**Svolgimento.**

Poiché la legge  $y = N(t)$  appare come lineare in scala logaritmica, essa è esponenziale:

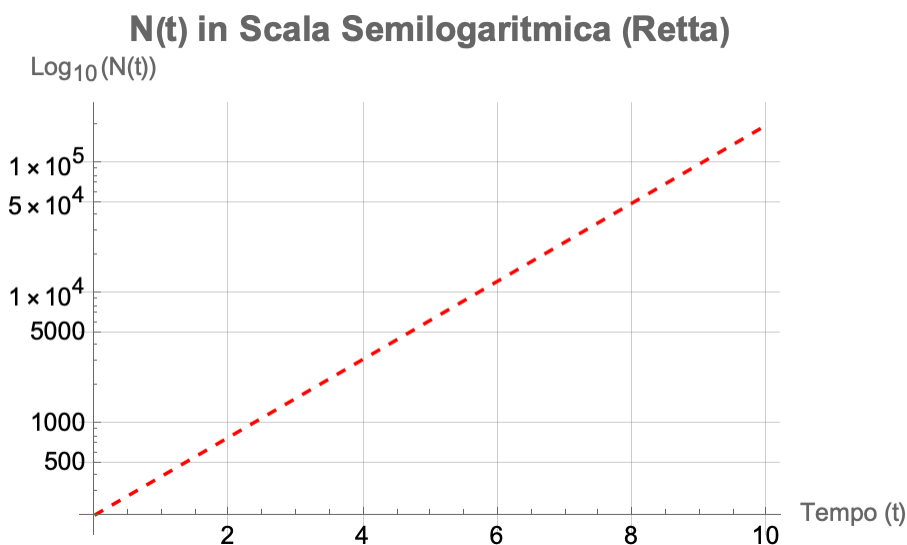
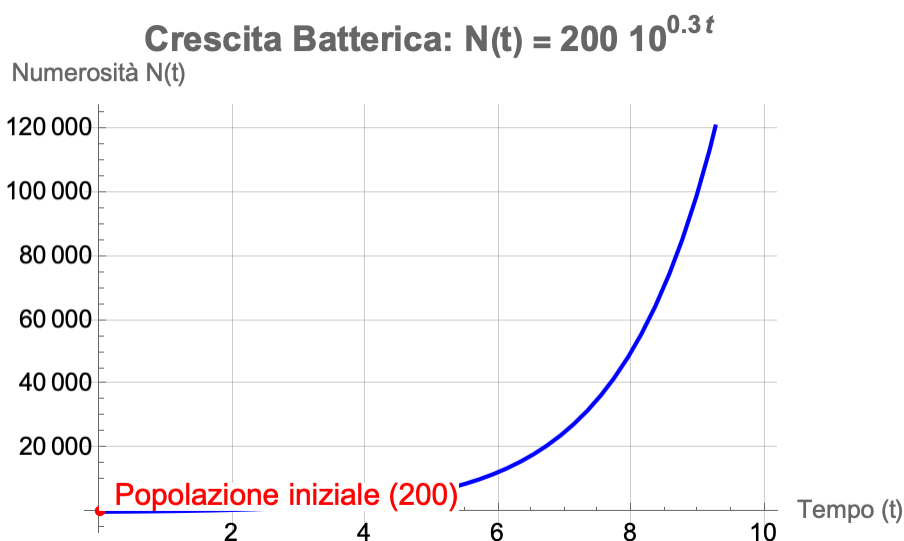
$$y = N(t) = c a^t \iff y' = \log(y) = \log(N(t)) = \log(c) + t \log(a), \quad a > 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dai dati forniti nel testo, ricaviamo che

$$\begin{aligned} \log(a) = 0.3 &\implies a = 10^{0.3}, \\ N(0) = 200 &\implies c \cdot a^0 = c = 200. \end{aligned}$$

Pertanto, la legge cercata è

$$N(t) = 200 \cdot 10^{0.3t}.$$



**Esercizio 4 (5 punti).** Viene disegnato un test diagnostico per la prevenzione di una malattia rara, che colpisce il 2% della popolazione. Da una fase di sperimentazione emerge che, su 100 individui malati, il test ne diagnostica correttamente 98, così come, su 100 individui sani, il test ne diagnostica correttamente 95.

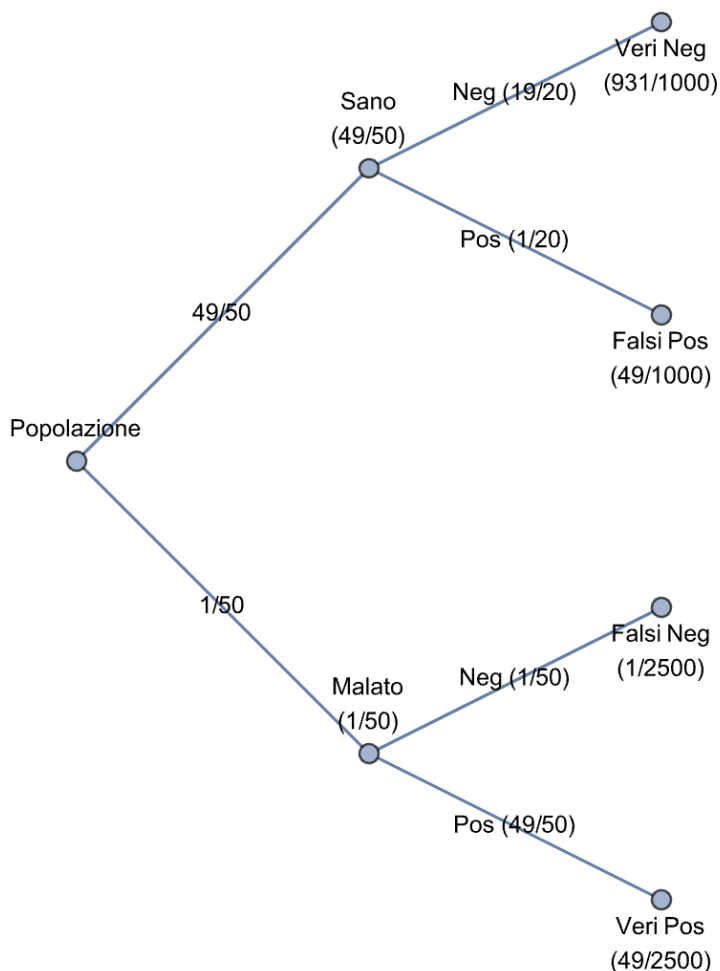
Determinare il valore predittivo positivo del test.

### Svolgimento.

La prevalenza della malattia è  $P(M) = 2\% = 2/100$ ; il test ha una sensibilità  $P(T^+|M) = 98\% = 98/100$ , e una specificità  $P(T^-|S) = 95\% = 95/100$ . Il valore predittivo positivo del test vale quindi

$$\begin{aligned}
 P(M|T^+) &= P(T^+|M) \cdot \frac{P(M)}{P(T^+)} = \frac{P(T^+|M) \cdot P(M)}{P(T^+|M) \cdot P(M) + [1 - P(T^-|S)] \cdot [1 - P(M)]} \\
 &= \frac{\frac{98}{100} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{98}{100} \cdot \frac{2}{100} + \left(1 - \frac{95}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right)} = \frac{98 \cdot 2}{98 \cdot 2 + 5 \cdot 98} = \frac{2}{2 + 5} \\
 &= \frac{2}{7} \simeq 28.6\%.
 \end{aligned}$$

### Albero Diagnostico (Valori Frazionari)



**Esercizio 5 (6 punti).** In un parco naturale, si osserva che la popolazione di orsi ha una numerosità ben descritta dalla funzione

$$p(t) = \frac{12}{1 + (t - 5)^4}, \quad t \geq 0,$$

dove  $t$  denota il tempo, misurato in settimane, trascorso dall'inizio dell'introduzione della specie nel parco.

Dopo quante settimane la numerosità della popolazione è massima? Quanto vale tale popolazione massima?

---

### Svolgimento.

Per determinare la monotonia della funzione  $p(t)$ , studiamo il segno della sua derivata. Ricordando la regola di derivazione del reciproco di una funzione,

$$\left( \frac{1}{g(t)} \right)' = -\frac{g'(t)}{g(t)^2},$$

e osservando che per la regola di derivazione della funzione composta si ha

$$g(t) = 1 + (t - 5)^4 \implies g'(t) = 0 + 4(t - 5)^3 = 4(t - 5)^3,$$

otteniamo

$$p'(t) = 12 \cdot \left( \frac{1}{1 + (t - 5)^4} \right)' = -12 \cdot \frac{4(t - 5)^3}{1 + (t - 5)^4} = -48 \cdot \frac{(t - 5)^3}{1 + (t - 5)^4}.$$

Poiché il denominatore dell'espressione al lato destro dell'uguaglianza è sempre positivo, il segno della derivata  $p'(t)$  è determinato dal segno del numeratore. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} p'(t) \geq 0 &\iff -(t - 5)^3 \geq 0 \iff (t - 5)^3 \leq 0 \\ &\iff t - 5 \leq 0 \iff t \leq 5. \end{aligned}$$

Dovendo considerare  $t \geq 0$ , concludiamo che la funzione  $p(t)$  è crescente quando  $0 \leq t \leq 5$ , e decrescente quando  $t \geq 5$ . Pertanto,  $t = 5$  è un punto di massimo per la funzione  $p(t)$ : la popolazione di orsi ha numerosità massima dopo 5 settimane, quando assume il valore

$$p(5) = \frac{12}{1 + (5 - 5)^4} = 12.$$

**Esercizio 6 (5 punti).** L'altezza degli iscritti al Corso di Studi in Scienze Biologiche è distribuita in maniera normale, con una media di 170 cm e una deviazione standard di 10 cm. Stabilire, in maniera empirica o tramite la tabella riportata dietro il frontespizio, la percentuale di studenti iscritti al corso che ha un'altezza compresa fra i 150 cm e i 180 cm.

---

### Svolgimento.

Chiamiamo  $X$  la variabile aleatoria che descrive l'altezza degli iscritti al Corso di Studi in Scienze Biologiche, espressa in cm;  $X$  ha allora distribuzione normale di media  $m = 170$  e deviazione standard 10.

#### *Risoluzione tramite regola empirica*

Osserviamo che

$$150 = 170 - 2 \cdot 10 = m - 2\sigma, \quad 180 = 170 + 10 = m + \sigma.$$

Dalla regola empirica per la distribuzione normale, si ha che

$$P(m - 2\sigma \leq X \leq m) \simeq \frac{1}{2} \cdot 95\% = 47.5\%, \quad P(m \leq X \leq m + \sigma) \simeq \frac{1}{2} \cdot 68\% = 34\%.$$

Pertanto, la probabilità richiesta può essere stimata come

$$\begin{aligned} P(150 \leq X \leq 180) &= P(m - 2\sigma \leq X \leq m + \sigma) \\ &= P(m - 2\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m + \sigma) \\ &\simeq 47.5\% + 34\% = 81.5\%. \end{aligned}$$

#### *Risoluzione tramite distribuzione normale standard*

La variabile aleatoria  $Z = (X - m)/\sigma$  ha distribuzione normale standard. Pertanto

$$\begin{aligned} P(150 \leq X \leq 180) &= P\left(\frac{150 - 170}{10} \leq Z \leq \frac{180 - 170}{10}\right) = P(-2 \leq Z \leq 1) \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -2). \end{aligned}$$

Per via delle simmetrie della densità di probabilità gaussiana, si ha

$$P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2).$$

Pertanto, consultando la tabella dei valori della funzione di distribuzione normale standard, la probabilità richiesta può essere calcolata come

$$P(150 \leq X \leq 180) = P(Z \leq 1) + P(Z \leq 2) - 1 \simeq 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185 = 81.85\%.$$