

Quantum Machine Learning

A.A. 2025/2026 – Prof. C. Presilla

verifica 3 settembre 2026

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

Esercizio 1 Si consideri la matrice di densità ρ_0 di un sistema a due qubit descritta nella base computazionale ordinata $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ da:

$$\rho_0 = \frac{3}{4}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{4}|11\rangle\langle 11| + \frac{\sqrt{3}}{4}|00\rangle\langle 11| + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle\langle 00|.$$

- Scrivere la rappresentazione matriciale esplicita di ρ_0 . Calcolarne gli autovalori e la purezza $\text{tr}(\rho_0^2)$.
- Calcolare le matrici di densità ridotte dei due singoli qubit $\rho_A = \text{tr}_B(\rho_0)$ e $\rho_B = \text{tr}_A(\rho_0)$.
- Il sistema evolve secondo l'Hamiltoniana autonoma $H = \frac{1}{2}\hbar\omega(Z \otimes I + I \otimes Z)$. Calcolare la matrice di densità del sistema $\rho(t)$ al tempo t assumendo che $\rho(0) = \rho_0$.
- Determinare l'evoluzione temporale del valore medio dell'osservabile $F = X \otimes X$, $\langle F \rangle(t) = \text{tr}(\rho(t)F)$.

a) Rappresentazione matriciale di ρ_0 nella base computazionale

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda il calcolo degli autovalori la precedente matrice è equivalente alla seguente diagonale a blocchi (scambio colonne 2 $\leftrightarrow$ 4 e righe 2 $\leftrightarrow$ 4).

$$\begin{pmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il blocco superiore ha come autovalori le soluzioni di $(3/4 - \lambda)(1/4 - \lambda) - 3/16 = 0$. Gli autovalori di ρ_0 sono quindi $\{1, 0, 0, 0\}$. La purezza di ρ_0 è $\text{tr}(\rho_0^2) = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 1$ (lo stato è puro).

b) Matrici di densità ridotte:

$$\rho_A = \text{tr}_B(\rho_0) = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$\rho_B = \text{tr}_A(\rho_0) = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

c) Gli autovettori di H sono gli stati di base con autovalori: $H|00\rangle = \hbar\omega|00\rangle$, $H|01\rangle = 0$, $H|10\rangle = 0$, $H|11\rangle = -\hbar\omega|11\rangle$. L'evoluzione temporale di ρ_0 è $\rho(t) = e^{-iHt/\hbar}\rho_0 e^{iHt/\hbar}$ che nella base computazionale fornisce la matrice

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-2i\omega t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}e^{2i\omega t} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

d) Poiché $\rho(t)$ ha elementi di matrice non nulli solo tra gli stati $|00\rangle$ e $|11\rangle$, e inoltre risulta $(X \otimes X)|00\rangle = |11\rangle$ e $(X \otimes X)|11\rangle = |00\rangle$, la traccia $\text{tr}(\rho(t)F)$ fornisce

$$\begin{aligned} \langle F \rangle(t) &= \text{tr}(\rho(t)F) \\ &= \langle 00|\rho(t)F|00\rangle + \langle 01|\rho(t)F|01\rangle + \langle 10|\rho(t)F|10\rangle + \langle 11|\rho(t)F|11\rangle \\ &= \langle 00|\rho(t)|11\rangle + \langle 11|\rho(t)|00\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}e^{2i\omega t} + \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-2i\omega t} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2\omega t). \end{aligned}$$

Esercizio 2

- a) Si consideri un circuito quantistico a due qubit applicato allo stato iniziale $|\psi_0\rangle = |01\rangle$. Il circuito è costituito, nell'ordine, dalle seguenti porte: $U_1 = T \otimes S$ (con $T = P_{\pi/4} = |0\rangle\langle 0| + e^{i\pi/4}|1\rangle\langle 1|$ e $S = P_{\pi/2} = |0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 1|$), $U_2 = H \otimes I$, e infine $U_3 = CNOT_{1 \rightarrow 2}$. Calcolare lo stato finale $|\psi_f\rangle = U_3 U_2 U_1 |\psi_0\rangle$ esplicitandone i coefficienti nella base computazionale.
- b) Si consideri la trasformata di Fourier quantistica a due qubit F_4 , la cui rappresentazione matriciale nella base computazionale è

$$F_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

Calcolare lo stato trasformato $|\phi_{out}\rangle = F_4 |\phi_{in}\rangle$, dove $|\phi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$, e calcolare la probabilità di misurare ciascuna stringa di bit.

- c) Si codificano due vettori reali $u = (1, 0)^T$ e $v = (1/2, \sqrt{3}/2)^T$ negli stati quantistici $|u\rangle = |0\rangle$ e $|v\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$ e si sottopongono quest'ultimi allo SWAP test

$$(H \otimes I \otimes I) F (H \otimes I \otimes I) (|0\rangle \otimes |u\rangle \otimes |v\rangle),$$

essendo F l'operatore di SWAP controllato dal qubit ancilla inizialmente posto nello stato $|0\rangle$. Calcolare:

- il prodotto scalare esplicito $\langle u|v\rangle$ tra i due vettori assegnati;
- la probabilità $P(0)$ di misurare il qubit ancilla nello stato 0 alla fine dello SWAP test.

- a) Calcolo sequenziale dello stato

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |01\rangle, \\ |\psi_1\rangle &= (T \otimes S)|01\rangle = (T|0\rangle) \otimes (S|1\rangle) = |0\rangle \otimes (i|1\rangle) = i|01\rangle, \\ |\psi_2\rangle &= (H \otimes I)(i|01\rangle) = i(H|0\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle), \\ |\psi_f\rangle &= CNOT_{1 \rightarrow 2} \left(\frac{i}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|11\rangle \right) = \frac{i}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle. \end{aligned}$$

- b) Rappresentazione di $|\phi_{in}\rangle$ come vettore colonna

$$\begin{aligned} |00\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 0)^T \\ |10\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1, 0)^T \end{aligned}$$

e quindi $|\phi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)^T$. Eseguendo il prodotto $F_4|\phi_{in}\rangle$ troviamo

$$|\phi_{out}\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\phi_{in}\rangle.$$

Probabilità dei risultati di misura di ciascuna delle quattro stringhe di bit $\text{Prob}(00) = \text{Prob}(10) = |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$, $\text{Prob}(01) = \text{Prob}(11) = 0$.

- c) • Il calcolo diretto del prodotto scalare tra i vettori $|u\rangle, |v\rangle$ fornisce

$$\langle u|v\rangle = \langle 0| \left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle \right) = \frac{1}{2}.$$

- Poiché lo stato finale dello SWAP test è

$$\frac{1}{2}|0\rangle \otimes (|u\rangle \otimes |v\rangle + |v\rangle \otimes |u\rangle) + \frac{1}{2}|1\rangle \otimes (|u\rangle \otimes |v\rangle - |v\rangle \otimes |u\rangle),$$

la misura del qubit ancillare dà come risultato 0 con probabilità

$$\begin{aligned} P(0) &= \left\| \frac{1}{2}(|u\rangle \otimes |v\rangle + |v\rangle \otimes |u\rangle) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\langle u|v\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Si osservi che, misurando $P(0) = 5/8$, dallo SWAP test troveremmo $|\langle u|v\rangle|^2 = 2P(0) - 1 = 1/4$ in accordo con il calcolo diretto.