

Quantum Machine Learning

A.A. 2025/2026 – Prof. C. Presilla

verifica 17 giugno 2026

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

Esercizio 1 Si consideri un sistema composto da due qubit, denominati A e B , descritto dalla seguente matrice di densità ρ (nota nella letteratura come stato di Werner) nello spazio di Hilbert composito $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$$\rho = \frac{3}{4}|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + \frac{1}{16}I_4,$$

dove I_4 è l'operatore identità in $\mathbb{C}^4$ e $|\Phi^+\rangle$ lo stato di Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.

- Verificare formalmente che ρ è una matrice di densità ben definita. Calcolare la traccia di ρ^2 per stabilire se si tratta di uno stato puro o di una miscela statistica.
- Determinare la matrice di densità ridotta ρ_A del qubit A .
- Si consideri l'osservabile quantistica definita dall'operatore globale $O = Z \otimes Z$, dove Z è la matrice di Pauli $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$. Calcolare il valore medio $\langle O \rangle_\rho$ e la varianza $\langle O^2 \rangle_\rho - \langle O \rangle_\rho^2$ in questo stato.
- Supponendo di effettuare una misura dell'osservabile locale $Z_A = Z \otimes I$ (matrice di Pauli Z applicata solo sul qubit A), determinare:
 - I possibili risultati della misura e le rispettive probabilità.
 - Lo stato post-misura del sistema complessivo associato a ciascun esito.

a) Nella base computazionale $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ si ha

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} + \frac{1}{16} & 0 & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} + \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

pertanto $\rho = \rho^\dagger$ e

$$\text{tr } \rho = \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{16} \times 4 = 1.$$

Gli autovalori di ρ sono le soluzioni $\lambda \in \mathbb{R}$ di $\det(\rho - \lambda I_4) = 0$, ovvero

$$\left(\frac{1}{16} - \lambda\right) \left(\frac{1}{16} - \lambda\right) \left(\left(\frac{7}{16} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{6}{16}\right)^2\right) = 0$$

che ha radici

$$\lambda_1 = \frac{1}{16}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{16}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{16}, \quad \lambda_4 = \frac{13}{16},$$

tutte positive quindi $\rho > 0$. La traccia di ρ^2 vale

$$\text{tr} \rho^2 = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 = \frac{3 + 169}{256} < 1$$

quindi ρ descrive una miscela statistica.

b) Esprimiamo il proiettore dello stato di Bell come

$$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$$

e calcoliamone la traccia parziale rispetto al sottosistema B

$$\text{tr}_B(|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|) = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}I_2.$$

Inoltre, per l'identità globale vale $\text{tr}_B(I_4) = \text{tr}_B(I_2 \otimes I_2) = I_2 \text{tr}(I_2) = 2I_2$. Di conseguenza:

$$\rho_A = \text{tr}_B(\rho) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} I_2 \right) + \frac{1}{16} (2I_2) = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8} \right) I_2 = \frac{1}{2} I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) L'azione dell'operatore O sugli elementi della base è $O|00\rangle = |00\rangle$, $O|11\rangle = |11\rangle$, $O|01\rangle = -|01\rangle$, $O|10\rangle = -|10\rangle$. Pertanto nella base computazionale si ha

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e il valore medio di O nello stato ρ vale

$$\langle O \rangle_\rho = \text{tr}(\rho O) = \text{tr} \begin{pmatrix} \frac{3}{8} + \frac{1}{16} & 0 & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} + \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \frac{3}{4}.$$

Poiché $Z^2 = I_2$, si ha $O^2 = (Z \otimes Z)^2 = Z^2 \otimes Z^2 = I_4$. Pertanto

$$\langle O^2 \rangle_\rho = \text{tr}(\rho O^2) = \text{tr}(\rho I_4) = \text{tr} \rho = 1.$$

La varianza è

$$(\Delta_\rho O)^2 = \langle O^2 \rangle_\rho - \langle O \rangle_\rho^2 = \frac{7}{16}.$$

d) Gli autovalori di Z_A sono $+1$ e -1 . I rispettivi proiettori spettrali nello spazio composito sono $P_+ = |0\rangle\langle 0| \otimes I$ e $P_- = |1\rangle\langle 1| \otimes I$. Le probabilità dei due esiti sono quindi

$$\begin{aligned} \text{Prob}(+1) &= \text{tr}(P_+ \rho) = \langle 0 | \rho_A | 0 \rangle = \frac{1}{2}, \\ \text{Prob}(-1) &= \text{tr}(P_- \rho) = \langle 1 | \rho_A | 1 \rangle = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

I rispettivi stati post-misura risultano rispettivamente

$$\rho_+ = \frac{P_+ \rho P_+}{\text{Prob}(+1)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0|_A \otimes \left(\frac{7}{8}|0\rangle\langle 0|_B + \frac{1}{8}|1\rangle\langle 1|_B \right),$$

$$\rho_- = \frac{P_- \rho P_-}{\text{Prob}(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix} = |1\rangle\langle 1|_A \otimes \left(\frac{1}{8}|0\rangle\langle 0|_B + \frac{7}{8}|1\rangle\langle 1|_B \right).$$

Si ricordi che se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

- a) Sia dato il vettore classico bidimensionale reale e normalizzato $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Mostrare formalmente come questo vettore viene rappresentato rispettivamente tramite codifica in ampiezza e codifica in base, assumendo per quest'ultima di utilizzare un'approssimazione a 2 bit per componente dopo la virgola (stringa binaria frazionaria $0.b_1b_2$).

- b) Si consideri un registro a due qubit inizialmente preparato nello stato di base $|\psi_0\rangle = |10\rangle$. Sul registro viene applicata la seguente sequenza di porte quantistiche coerenti

- una porta di Hadamard H sul primo qubit;
- una porta di fase T (dove $T = |0\rangle\langle 0| + e^{i\pi/4}|1\rangle\langle 1|$) sul primo qubit;
- una porta CNOT, configurando il primo qubit come controllo e il secondo come target.

Calcolare esplicitamente lo stato quantistico del sistema al termine di ciascuna delle tre applicazioni, esprimendo il risultato finale $|\psi_f\rangle$ come combinazione lineare della base computazionale.

- c) Calcolare la fidelity (modulo quadro del prodotto scalare) tra lo stato finale $|\psi_f\rangle$ e lo stato di Bell $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$.
- d) Enunciare e dimostrare il Teorema di No-Cloning quantistico.

- a) Amplitude Encoding: Il vettore di due componenti reali x_0, x_1 viene mappato direttamente sulle ampiezze di probabilità di un singolo qubit ($\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $\dim \mathcal{H} = 2$)

$$|\psi_{\text{amp}}\rangle = x_0|0\rangle + x_1|1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle.$$

Basis Encoding: Convertiamo le due componenti reali x_0, x_1 in binari frazionari a due bit

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0.866, \quad 0.866 \times 2 = 1.732 \rightarrow 1, \quad 0.732 \times 2 = 1.464 \rightarrow 1,$$

quindi $x_0 \simeq 0.11_2 \rightarrow |11\rangle$;

$$x_1 = 0.5, \quad 0.5 \times 2 = 1.0 \rightarrow 1, \quad 0.0 \times 2 = 0 \rightarrow 0,$$

quindi $x_1 = 0.10_2 \rightarrow |10\rangle$. Con l'approssimazione scelta i due numeri reali sono trasformati in $2 + 2 = 4$ bit che vengono codificati in uno stato di 4 qubit ($\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes 4}$, $\dim \mathcal{H} = 16$)

$$|\psi_{\text{base}}\rangle = |11\rangle_0 \otimes |10\rangle_1 = |1110\rangle.$$

- b) Evoluzione

$$|\psi_0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = (H \otimes I)|\psi_0\rangle = (\frac{1}{\sqrt{2}}(X + Z) \otimes I)|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle)$$

$$|\psi_2\rangle = (T \otimes I)|\psi_1\rangle = ((|0\rangle\langle 0| + e^{i\pi/4}|1\rangle\langle 1|) \otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - e^{i\pi/4}|10\rangle)$$

$$|\psi_f\rangle = CNOT_{01}|\psi_2\rangle = ((|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - e^{i\pi/4}|10\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - e^{i\pi/4}|11\rangle)$$

- c) Lo stato di Bell di riferimento è $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$ e il prodotto scalare con $|\psi_f\rangle$ vale

$$\langle\Psi^-|\psi_f\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 01| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 10|\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) = 0.$$

Dunque la fidelity è $F = |\langle\Psi^-|\psi_f\rangle|^2 = 0$, gli stati risultano perfettamente ortogonali.

- d) *Definizione di quantum cloner.* Chiamiamo quantum cloner $(|\eta\rangle, U, \mathcal{H})$ un sistema quantistico composito nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ tale che esistono uno stato $|\eta\rangle \in \mathcal{H}$ e un operatore unitario $U : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ che soddisfano $U|\psi\rangle \otimes |\eta\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$ per ogni $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Teorema No-Cloning. Un quantum cloner $(|\eta\rangle, U, \mathcal{H})$ non può esistere.

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che un quantum cloner $(|\eta\rangle, U, \mathcal{H})$ esista e siano $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ due arbitrari stati puri di $\mathcal{H}$. Allora

$$\begin{aligned} U|\psi\rangle \otimes |\eta\rangle &= |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle, \\ U|\phi\rangle \otimes |\eta\rangle &= |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle. \end{aligned}$$

Prendendo il prodotto scalare tra gli stati a sinistra e a destra del segno = otteniamo

$$\langle\psi\eta|U^\dagger U|\phi\eta\rangle = \langle\psi\eta|\phi\eta\rangle = \langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi\psi|\phi\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^2.$$

L'uguaglianza $\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^2$ può essere vera solo se $|\psi\rangle = |\phi\rangle$ oppure $|\psi\rangle \perp |\phi\rangle$, non per $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ arbitrari come supposto.