Mesoni 0^-

- I tre stati A, B, C aventi $I_3=0$ e $Y=0$ sono delle combinazioni lineari ortogonali degli stati $u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}$

- Indichiamo uno stato con $\{n, | I, I_3 \rangle\}$ dove n è la dimensione della rappresentazione.

- Il singoletto di SU(3) dovrà contenere, per simmetria, tutti e tre gli stati con lo stesso peso:

$$\boxed{\eta_1 = \{1, | 0, 0 \rangle\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\right)}$$

- Uno degli altri due stati con $I_3=0$ deve far parte del tripletto con isospin=1, quindi può essere ricavato con gli operatori ladder, cioè con gli operatori di innalzamento e abbassamento della carica.

Coniugazione di carica dei nucleoni

- Per comodità ricordiamo come si comportano alcuni nucleoni per coniugazione di carica. Compaiono alcuni segni "meno" in accordo con la convenzione di Condon-Shortley.

I_3				
$+\frac{1}{2}$	$\|p\rangle$	$\|\bar{n}\rangle$	$\|u\rangle$	$\|\bar{d}\rangle$
$-\frac{1}{2}$	$\|n\rangle$	$-\|\bar{p}\rangle$	$\|d\rangle$	$-\|\bar{u}\rangle$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I^- \,|\, \bar{d}\rangle = |-\bar{u}\rangle \\ I^+ \,|\, \bar{u}\,\rangle = |-\bar{d}\rangle \end{cases}$$

$I^{\pm}$: operatore di shift di isospin

(innalzamento e abbassamento della carica)

- N.B. Il quark s è un singoletto di isospin, quindi quando lo si aggiunge ad un doppietto di isospin non ne cambia le proprietà:

$$\begin{pmatrix} u\bar{s} = K^+ \\ d\bar{s} = K^0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} s\bar{d} = \bar{K}^0 \\ -s\bar{u} = -K^- \end{pmatrix}$$

- Combinando d con ū (o viceversa) possiamo avere I=0 oppure I=1

Funzione d'onda del π^0

- Applichiamo l'operatore di shift di isospin che ha la proprietà seguente:

$$I^{\pm}\,|\,\Psi(I,I_3)\rangle = \sqrt{I(I+1)-I_3(I_3\pm 1)}\;|\,\Psi(I,I_3\pm 1)\rangle$$

- Se lo applichiamo ad un quark otteniamo: $\begin{cases} I^{+}\,|\,d\,\rangle = |\,u\rangle \;\; ; \;\; I^{+}\,|\,\bar{u}\,\rangle = |-\bar{d}\rangle \;\; ; \\ I^{+}\,|\,u\,\rangle = I^{+}\,|\,\bar{d}\rangle = 0 \end{cases}$

- Inoltre: $\begin{cases} I^{-}\,|\,\Psi(1,1)\rangle = I^{+}\,|\,\Psi(1,-1)\rangle = \sqrt{2}\,|\,\Psi(1,0)\rangle \\ I^{+}\,|\,\Psi(1,0)\rangle = \sqrt{2}\,|\,\Psi(1,1)\rangle \;\; ; \;\; I^{-}\,|\,\Psi(1,0)\rangle = \sqrt{2}\,|\,\Psi(1,-1)\rangle \\ I^{+}\,|\,\Psi(1,1)\rangle = I^{-}\,|\,\Psi(1,-1)\rangle = 0 \end{cases}$

- Per convenzione la funzione d'onda del π^o è: $-d\bar{u}$

$$I^{+}\,|\,\pi^{-}\,\rangle = I^{+}\,|-d\bar{u}\,\rangle = \left|-\left[\left(I^{+}d\right)\bar{u} + d\left(I^{+}\bar{u}\right)\right]\right\rangle = |-u\bar{u}+d\bar{d}\rangle = \sqrt{2}\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|-u\bar{u}+d\bar{d}\rangle\right) = \sqrt{2}\;|\pi^{0}\rangle$$

- Il π^o viene identificato con lo stato: $\boxed{\pi^{0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(d\bar{d}-u\bar{u}\right)}$

- Infatti: $I^{+}\,|\,\pi^{0}\,\rangle = I^{+}\,\frac{|\,d\bar{d}-d\bar{u}\,\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|\,u\bar{d}+0-0-u\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\;\;|\,u\bar{d}\rangle = \sqrt{2}\;\;|\pi^{+}\rangle$

Identificazione delle funzioni d'onda con gli stati fisici (particelle)

- Per trovare il singoletto dell'ottetto $\eta_8 = \{8, |\,0,0\rangle\}$ bisogna trovare la combinazione ortogonale a $\eta_1 = \{1, |\,0,0\rangle\}$ e al π^o :

$$\boxed{\eta_8 = \{8, |\,0,0\rangle\} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}\right)}$$

$$\boxed{\text{N.B. } I^{\pm}\,|\,\eta_8\rangle = 0}$$

- Gli stati fisici η e η' sono una combinazione lineare di η_1 e η_8, ma dato che l'angolo di mixing è piccolo (~11°), si può fare l'identificazione

$$\boxed{\begin{array}{lll} \eta_8 \equiv \eta & ; & m_\eta = 548 \text{ MeV} \\ \eta_1 \equiv \eta' & ; & m_{\eta'} = 958 \text{ MeV} \end{array}}$$

Mesoni 1^-

- **I mesoni vettori 1- hanno la stessa composizione in quark dei mesoni 0^-, si trovano in onda S ma i due quark (quark-antiquark) hanno gli spin paralleli.**

- Vi sono tre mesoni con $I_3=0$ e $Y=0$; uno di essi fa parte del tripletto di isospin ρ : ρ^+, ρ^-, ρ^0.
- ρ^0 ha la stessa funzione d'onda del π^0 (a parte un fattore "-1"):

$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u} - d\bar{d}\right)$$

- Il singoletto di SU(3) ϕ_1 e il singoletto di isospin dell'ottetto ϕ_8 si mescolano tra loro per dare gli autostati di massa ϕ e ω:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega &= \phi_1 \cos\vartheta + \phi_8 \sin\vartheta \\ \phi &= \phi_1 \sin\vartheta - \phi_8 \cos\vartheta \end{aligned}}$$

- N.B. in questo caso l'angolo di mescolamento $\theta \sim 35^o$

Esercizio accademico: calcolo di θ

- Assumiamo che l'elemento di matrice dell'Hamiltoniana tra due stati diversi dia il valore della "massa" al quadrato:

$$M_\omega^2 = \langle \omega | H | \omega \rangle = M_1^2 \cos^2\vartheta + M_8^2 \sin^2\vartheta + 2M_{18}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta$$
$$M_\phi^2 = \langle \phi | H | \phi \rangle = M_1^2 \sin^2\vartheta + M_8^2 \cos^2\vartheta - 2M_{18}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta$$

- Dato che ω e ϕ sono due autostati di massa, essi sono ortogonali:

$$M_{\omega\phi}^2 = \langle \phi | H | \omega \rangle = 0 = \left(M_1^2 - M_8^2\right)\sin\vartheta\cos\vartheta + M_{18}^2\left(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta\right)$$

- Eliminando M_{18} e M_1 da queste tre equazioni si ottiene: $\tan^2\vartheta = \dfrac{M_\phi^2 - M_8^2}{M_8^2 - M_\omega^2}$

- Utilizzando la formula di massa di Gell-Mann – Okubo si ha:

$$M_8^2 = \frac{1}{3}\left(4M_{K^*}^2 - M_\rho^2\right)$$

- Mettendo nella formula i valori misurati delle masse si ha:

$M_\rho = 776$ MeV
$M_{K^*} = 892$ MeV
$M_\omega = 783$ MeV
$M_\phi = 1020$ MeV

$$\boxed{\vartheta \approx 40^o}$$

$$\boxed{N.B.\ \sin\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{ se }\ \vartheta \approx 35^o}$$

Mesoni 1^-

- Se utilizziamo $\sin \vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ si ha:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\phi_8 + \sqrt{2}\phi_1\right)$$
$$\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\phi_1 - \sqrt{2}\phi_8\right)$$

- Dato che:

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\right)$$
$$\phi_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}\right)$$

- Abbiamo:

$$\phi = s\bar{s} \quad ; \; \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u} + d\bar{d}\right)$$

- In questo caso di "mixing ideale", che è quasi vero in pratica, la ϕ è composta interamente da quark s e l'ω da u e d
- Questo comporta che la massa dell'ω dovrebbe essere simile a quella della ρ^o e la massa della ϕ più grande, come osservato sperimentalmente.

Riassunto del mescolamento

- Per gli stati con I=0
  - η,η' sono delle combinazioni lineari di η_1, η_8 che possono mescolarsi dato che hanno gli stessi numeri quantici: ($I=I_3=S=0$)
  - La stessa cosa avviene per gli stati fisici ω et ϕ che sono il risultato del mescolamento di ϕ_1 et ϕ_8

Bisogna introdurre altri parametri : gli angoli di mixing degli stati.

$$|\omega\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(u\bar{u} + d\bar{d}\right)$$

$$|\phi\rangle = s\bar{s}$$

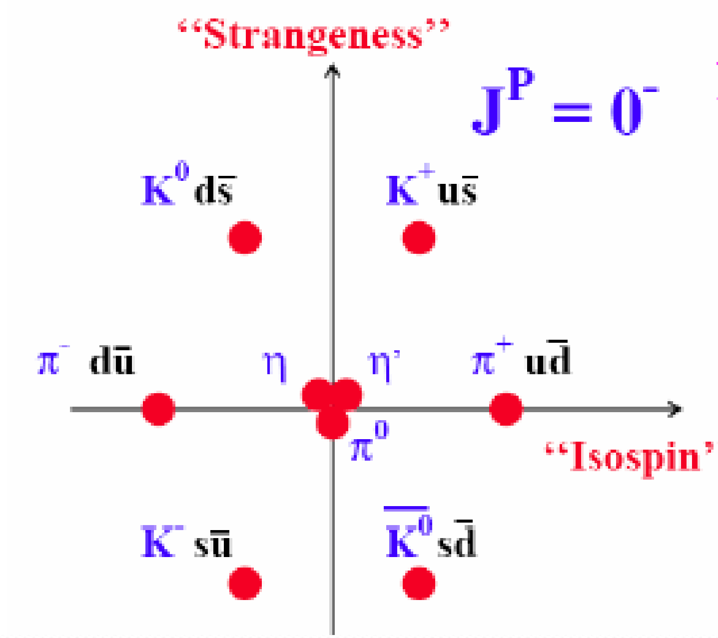
stato puro $s\bar{s}$

$$|\eta\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}\right)$$

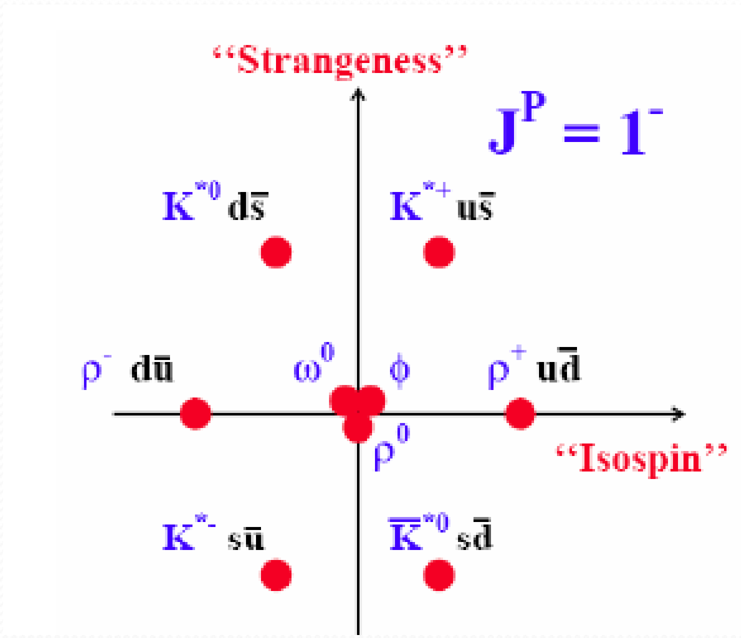
$$|\eta'\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\right)$$

Quasi esatto, c'è un piccolo mescolamento

Contenuto in quark dei Mesoni leggeri



Masses/MeV:
$\pi(140)$, $K(495)$
$\eta(550)$, $\eta'(960)$



Masses/MeV:
$\rho(770)$, $K^*(890)$
$\omega(780)$, $\phi(1020)$

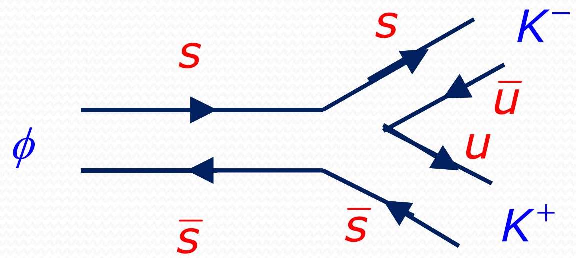
Regola di OZI

- La composizione in quark della Φ, insieme con la regola di OZI (Okubo, Zweig, Iizuka) permette di capire meglio i suoi decadimenti:

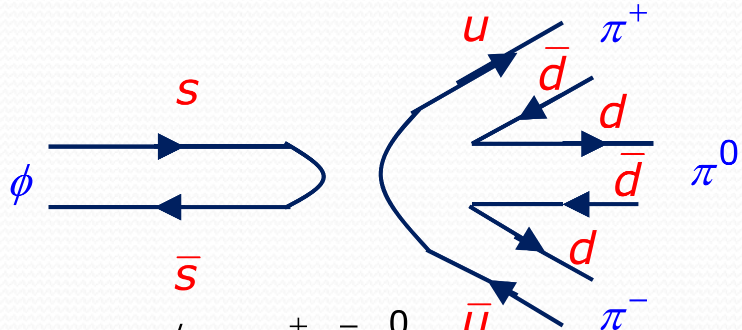
$$\phi(1020) \begin{array}{l} \to K^+K^- \\ \to K^0\bar{K}^0 \end{array}\Big\}\ 84\%$$

$$\to \pi^+\pi^-\pi^0 \quad 15\%$$

Lo spazio delle fasi favorisce il decadimento della Φ in 3π (Q ~ 600 MeV) rispetto al Q ~ 24 MeV del decadimento in KK



$\phi \to K^+K^-$



$\phi \to \pi^+\pi^-\pi^0$

REGOLA di OZI: quando ci sono delle linee di quark non connesse vi è una soppressione di questi diagrammi

La regola di OZI si può spiegare facendo ricorso alla QCD ed allo scambio di gluoni.

Importante per spiegare la lunga vita media della J/Ψ e della Y

Masse dei quark

- Utilizzando un "semplice" modello nel quale la massa dell'adrone deriva dalla massa dei quark e dalle loro interazioni iperfini, facendo dei fit opportuni al valore misurato delle particelle adroniche (vedere i dettagli sul Burcham and Jobes) si ricava il valore della massa "efficace" dei quark.

quark	Massa "libera" (MeV)	Massa efficace Mesoni (MeV)	Massa efficace Barioni (MeV)
u	5.6 1.1	310	363
d	9.9 1.1	310	363
s	199 33	483	538

- Diversa energia di legame tra mesoni e barioni.

- La massa "libera" è valutata alla scala di 1 GeV/c^2