

## MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 10 settembre 2020 - Canale M-Z

[Esame in modalità mista]

1. Usando il teorema dei residui, calcolare i seguenti integrali

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{x^2 + 1} dx$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{ib}}{x^2 + 1} dx .$$

I valori assegnati per  $a$  sono  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , mentre quelli assegnati per  $b$  sono 1 e 2 (per il secondo integrale si considera la determinazione tale che  $1^{ib} = 1$ ). Ogni studente doveva risolvere una sola combinazione di valori  $a$  e  $b$ .

2. Data la matrice

$$A(w) = \frac{1}{2w} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dove  $w$  è un numero complesso diverso da zero, calcolare

$$f(A(w)) = e^{A(w)}$$

usando la decomposizione spettrale o la formula di Dunford.

Usare il risultato ottenuto per calcolare

$$\int_{\gamma} e^{A(w)} dw$$

dove  $\gamma$  è una curva che circonda l'origine ed è percorsa in senso antiorario. Ogni studente aveva solo una delle due possibili scelte di segno.

3. Si consideri l'operatore

$$T = -i \frac{d}{dx} - \theta(x)$$

il cui dominio è

$$\mathcal{D}(T) = \{f, f' \in L^2[-\pi, \pi], f(-\pi) = f(\pi)\}$$

e  $\theta(x)$  è la funzione di Heaviside. Determinare lo spettro puntuale e le autofunzioni di  $T$ .