

MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 18 giugno 2019 - Canale N-Z

1. [6 pt.] Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{\sin\theta + 2} d\theta.$$

2. [4 pt.] Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z^2(z^2 + 8)} dz,$$

con γ quadrato di lato $L = 2$ centrato nell'origine, con i lati paralleli agli assi percorso in senso antiorario.

3. [7 pt.] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

calcolare $A^{\frac{1}{2}}$ usando per la funzione $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ la determinazione tale che $f(z)$ è positiva per z reale positivo e il taglio è lungo l'asse immaginario positivo.

4. [7 pt.] Calcolare la serie di Fourier in forma trigonometrica della funzione con periodo 2π definita da

$$f(x) = \cosh x \quad x \in [-\pi, \pi] .$$

Usare il risultato per risommare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

5. [6 pt.] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy''(x) - y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x}\delta(2x - 4) \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

con $x \in [1, +\infty)$.