

MODELLI e METODI MATEMATICI della FISICA

Esame scritto - 8 febbraio 2023 - Canale O-Z

1. [15 pt.] Si calcoli il seguente integrale usando il teorema dei residui

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1 + 3 \cos \theta}{3 + \cos \theta} d\theta .$$

2. [15 pt.] Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} .$$

- Usando la decomposizione spettrale si calcoli  $x^A$ , dove  $x$  è reale positivo.
- Si usi il risultato precedente per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \frac{1}{x} A \mathbf{y}(x) \\ \mathbf{y}(1) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

dove

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

- Si usino entrambi i risultati precedenti per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \frac{1}{x} A \mathbf{y}(x) + \delta(x - e) \mathbf{a} \\ \mathbf{y}(1) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

dove

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} .$$