Fisica 1 per chimica industriale, compito scritto 24/06/2015
Docente: Santanastasio Francesco

Nome e cognome: .... Matricola: ....

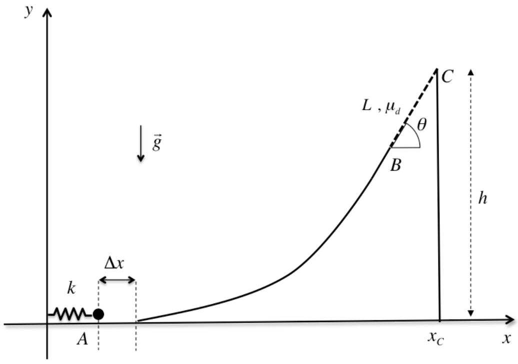
Tempo a disposizione 4 ore, e' permessa la consultazione del solo libro di testo (no libri di esercizi), e' obbligatorio spegnere i cellulari. Risolvere gli esercizi riportando le formule risolutive ed i risultati numerici utilizzando le unita' di misura del Sistema Internazionale.

Esercizio 1 - Meccanica del punto materiale

Una pallina (punto materiale) di massa m=50g si muove su una guida come mostrato in Figura 1. L'estremita' C della guida si trova ad una quota h=1m dal suolo. La pallina si muove senza attrito, tranne nell'ultimo tratto rettilineo BC (linea tratteggiata) di lunghezza L=20cm, inclinazione θ=60° rispetto al piano orizzontale, e caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.5. Alla base della guida e' posta una molla ideale di costante elastica k=50N/m e massa trascurabile. Nell'istante iniziale la molla e' compressa di una quantita' Δx=20cm rispetto alla propria lunghezza a riposo e la pallina si trova a terra a contatto con la molla nel punto A. Nella fase di estensione, la molla spinge la pallina che inizia a muoversi a contatto con la guida.

Determinare:
a) l'energia potenziale della molla nel punto iniziale A;
b) il modulo della velocita' della pallina nel punto B;
c) il modulo della velocita' della pallina nel punto C, in cui essa lascia la guida;
d) la distanza lungo l'asse x tra la coordinata x_C ed il punto in cui la pallina tocca terra.

Figura 1

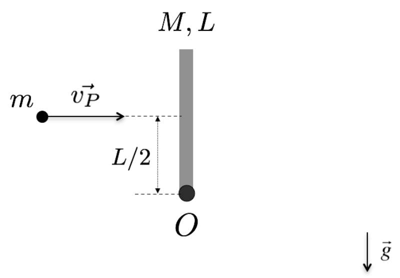


Esercizio 2 - Meccanica dei sistemi

Una sbarretta omogenea di lunghezza L=40cm e massa M=2Kg e' vincolata a ruotare senza attrito intorno ad un asse fisso orizzontale passante per una sua estremita' O (vedi Figura 2). Inizialmente la sbarretta si trova in quiete nella posizione verticale e viene colpita in corrispondenza del suo centro di massa da un proiettile (punto materiale) di massa m=100g e velocita' v_P=300m/s diretta ortogonalmente alla sbarretta.

Nell'ipotesi che il proiettile rimanga conficcato nella sbarretta (urto completamente anelastico), determinare:
a) il momento d'inerzia del sistema (sbarretta+proiettile) rispetto all'asse di rotazione passante per il polo O, dopo l'urto;
b) la velocita' angolare ω del sistema un istante dopo l'urto;
c) l'energia cinetica del sistema quando esso passa per il punto piu' basso della sua traiettoria.
[Momento d'inerzia della sola sbarretta rispetto al suo centro di massa = $ML^2/12$].

Figura 2

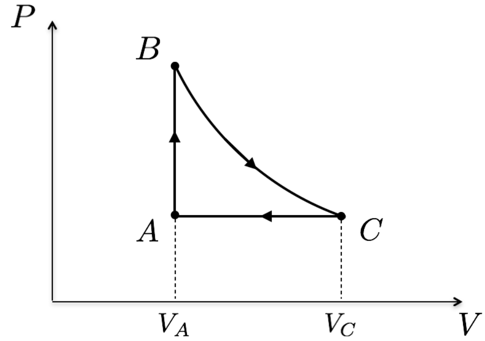


Esercizio 3 - Termodinamica

Una macchina termica reversibile lavora con una mole di gas perfetto monoatomico ed esegue il ciclo ABCA sul piano di Clapeyron mostrato in Figura 3: il ciclo e' formato da una trasformazione isocora (AB), un'espansione adiabatica (BC) ed una compressione isobara (CA).

Sapendo che T_A =26.8 °C e $V_C = 2 \cdot V_A$, determinare:
a) le temperature T_B e T_C ;
b) il calore assorbito ed il calore ceduto in un ciclo, ed il rendimento della macchina;
c) la variazione di entropia per ciascuna delle 3 trasformazioni (AB, BC, CA).

Figura 3



Soluzione - Esercizio 1

a)
$U_{molla} = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2} \cdot 50\text{N/m} \cdot (0.2m)^2 = 1$ J

b)
In assenza di attrito l'energia totale (cinetica + potenziale) si conserva nel tratto AB.

Assumendo che l'energia potenziale della forza peso sia nulla per y=0 (quota iniziale nel punto A):
$E_A = U_{molla} = \dfrac{1}{2}k\Delta x^2$
$E_B = K_B + U_{forza\ peso} = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgy_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg(h - L\sin\theta)$

Imponendo $\Delta E = E_B - E_A = 0$, si ottiene:
$v_B = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta x^2 - 2g(h - L\sin\theta)} = \sqrt{\frac{50}{0.05}(0.2)^2 - 2 \cdot 9.8(1 - 0.2 \cdot 0.866)}$ m/s = 4.9 m/s

c)
Nel tratto AC, il lavoro fatto dalle forze di attrito (che agiscono nel tratto BC) e' pari alla variazione di energia totale.

$L_{attrito} = -|F_{attrito}| \cdot L = -\mu_d \cdot mg\cos\theta \cdot L$

$E_A = U_{molla} = \dfrac{1}{2}k\Delta x^2$
$E_C = K_C + U_{forza\ peso} = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh$

Imponendo $L_{attrito} = \Delta E = E_C - E_A$, si ottiene:

$v_C = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta x^2 - 2g(h + \mu_d\cos\theta \cdot L)} = \sqrt{\frac{50}{0.05}(0.2)^2 - 2 \cdot 9.8(1 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.2)}$ m/s = 4.4 m/s

d)
La pallina abbandona la guida nel punto C con velocita' in modulo v_C e direzione inclinata di un angolo θ rispetto all'asse orizzontale. La pallina esegue dunque una traiettoria parabolica nel piano (x,y) sotto l'effetto della forza di gravita'.

Assumendo che all'istante iniziale sia t=0 e definendo un nuovo sistema di riferimento che ha l'origine dell'asse x nel punto x_C, le equazioni del moto della pallina sono:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x = v_C \cdot \cos\theta \\ v_y = -gt + v_C \cdot \sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = v_C \cdot \cos\theta \cdot t \\ y = -1/2 \cdot gt^2 + v_C \cdot \sin\theta \cdot t + h \end{cases}$$

Il tempo t^* in cui la pallina tocca terra si ottiene imponendo che la coordinata y sia nulla:
$0 = -1/2 \cdot gt^{*2} + v_C \cdot \sin\theta \cdot t^* + h$

Tra le due soluzioni possibili per t^*
$t^*_{1,2} = \dfrac{v_C \cdot \sin\theta \pm \sqrt{(v_C \cdot \sin\theta)^2 + 2gh}}{g}$,
l'unica che ha un senso fisico e' quella positiva:
$t^* = \frac{v_C \cdot \sin\theta}{g} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{(v_C \cdot \sin\theta)^2}}\right)$
La distanza lungo l'asse x tra la coordinata x_C ed il punto in cui la pallina tocca terra e' dunque pari a:

$x^* = v_C \cdot \cos\theta \cdot t^* = \frac{v_C^2 \cdot sin\,\theta \cdot cos\,\theta}{g} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{(v_C \cdot sin\,\theta)^2}}\right) = \frac{(4.4)^2 \cdot 0.866 \cdot 0.5}{9.8} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 9.8 \cdot 1}{(4.4 \cdot 0.866)^2}}\right)$ m = 2.2 m

Soluzione - Esercizio 2

a)
Il momento d'inerzia totale, rispetto all'asse di rotazione passante per O, e' la somma dei momenti d'inerzia della sbarretta e del proiettile:

$I_O^{sbarretta} = I_{CM}^{sbarretta} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = M\frac{L^2}{3}$ $\quad (Teorema\ di\ Huygens - Steiner)$

$I_O^m = m\left(\frac{L}{2}\right)^2$

$I_O^{tot} = I_O^{sbarretta} + I_O^m$

$I_O^{tot} = M\frac{L^2}{3} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 2\frac{0.4^2}{3} + 0.1\left(\frac{0.4}{2}\right)^2\ \text{kg m}^2 = 0.11\ \text{kg m}^2$

b)
La componente del momento angolare parallela all'asse di rotazione e calcolata rispetto al polo O si conserva, in quanto il momento delle forze impulsive (reazione vincolare) durante l'urto e' nullo rispetto al polo O.

Il momento angolare prima dell'urto (stato iniziale *i*) e':
$J_O^i = \frac{L}{2} \cdot m \cdot v_P$

Il momento angolare subito dopo l'urto (stato finale *f*) e' :
$J_O^f = I_O^{tot} \cdot \omega$

Essendo $J_O^f = J_O^i$:
$\omega = \frac{\left(\frac{L}{2}\right) \cdot m \cdot v_P}{I_O^{tot}} = \frac{\left(\frac{0.4}{2}\right) \cdot 0.1 \cdot 300}{0.11}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 54.5\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

c)
Dopo l'urto, sul sistema "sbarretta+proiettili" agiscono solo la forza peso e la reazione vincolare (quest'ultima essendo applicata nel punto O fisso non fa lavoro e non contribuisce pertanto al bilancio energetico). Dunque l'energia totale (energia cinetica + energia potenziale della forza peso) si conserva durante la rotazione.

Definiamo l'energia potenziale *U* dovuta alla forza peso (agente sul centro di massa del sistema) tale che essa sia pari a 0 nel punto piu' basso della traiettoria (l'energia potenziale e' sempre definita a meno di una costante). Tra il punto iniziale e quello finale (il punto piu' basso della traiettoria) c'e' un differenza di quota del centro di massa pari ad L.

L'energia totale subito dopo l'urto e' dunque:
$E = K + U = \frac{1}{2} \cdot I_O^{tot} \cdot \omega^2 + (m + M) \cdot g \cdot L$
L'energia totale nel punto piu' basso della traiettoria (cioe' quanto transita nella posizione opposta rispetto al punto di partenza) e' :

$E' = K' + U' = K' + 0 = K'$

Quindi, essendo $E' = E$, l'energia cinetica del sistema nel punto piu' basso e' pari a:

$K' = E = \frac{1}{2} \cdot I_O^{tot} \cdot \omega^2 + (m + M) \cdot g \cdot L = [\frac{1}{2} \cdot 0.11 \cdot 54.5^2 + (0.1 + 2) \cdot 9.8 \cdot 0.4]$ J = 172 J

Soluzione - Esercizio 3

Convertiamo la temperatura dello stato A in Kelvin: $T_A = (273.15 + 26.8)$ K = 300 K
Per un gas monoatomico: $c_V = \frac{3}{2}R$ $, e\ quindi$ $c_P = c_V + R = \frac{5}{2}R$

a)
Iniziamo calcolando la temperatura T_C.
Utilizzando la legge dei gas perfetti nei punti A e C si ottiene:
$P_C \cdot V_C = n \cdot R \cdot T_C$
$P_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A$
Nella trasformazione isobara CA la pressione resta costante ($P_C = P_A$), da cui dividendo le due equazioni:
$\frac{T_C}{T_A} = \frac{V_C}{V_A} \rightarrow T_C = T_A \frac{V_C}{V_A} = 300\text{K} \cdot 2 = 600$ K

Passiamo a calcolare la temperatura T_B.
Per una trasformazione adiabatica reversibile vale la relazione:
$PV^\gamma = cost.$, con $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{5}{3}$
Utilizzando la legge dei gas perfetti ($P = n \cdot R \cdot T / V$), la relazione si puo' riscrivere come:
$TV^{\gamma-1} = cost.'$
Per gli stati B e C vale dunque:
$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \rightarrow T_B = T_C \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} = T_C \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\gamma-1} = T_A \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\gamma} = 300\text{ K} \cdot (2)^{\frac{5}{3}} = 952$ K

b)
Calore scambiato nel tratto AB (isocora, volume costante):
$Q_{AB} = n \cdot c_V \cdot (T_B - T_A) = 1 \cdot 1.5 \cdot 8.314 \cdot (952 - 300)\text{ J} = 8131\text{ J} > 0 \rightarrow calore\ assorbito = Q_{ass}$
Calore scambiato nel tratto BC (adiabatica):
$Q_{BC} = 0$
Calore scambiato nel tratto CA (isobara, pressione costante):
$Q_{CA} = n \cdot c_P \cdot (T_A - T_C) = 1 \cdot 2.5 \cdot 8.314 \cdot (300 - 600)\text{ J} = -6235\text{ J} < 0 \rightarrow calore\ ceduto = Q_{ced}$
Il rendimento della macchina termica e' dunque:
$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{|Q_{ass}|} = 1 - \frac{6235}{8131} = 23.3\%$

c)
Per una trasformazione reversibile di un gas perfetto, la variazione di entropia vale:
$\Delta S_{if} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T}\Big|_{rev.} = n \cdot c_V \cdot \ln\frac{T_f}{T_i} + n \cdot R \cdot \ln\frac{V_f}{V_i}$
$\Delta S_{AB} = n \cdot c_V \cdot \ln\frac{T_B}{T_A} = 1 \cdot 1.5 \cdot 8.314 \cdot \ln\frac{952}{300} = 14.4$ J/K
$\Delta S_{BC} = 0\ (adiabatica\ reversibile, trasformazione\ isoentropica)$
$\Delta S_{CA} = n \cdot c_V \cdot \ln\frac{T_A}{T_C} + n \cdot R \cdot \ln\frac{V_A}{V_C} = 1 \cdot 1.5 \cdot 8.314 \cdot \ln\frac{300}{600} + 1 \cdot 8.314 \cdot \ln\frac{1}{2} = -14.4$ J/K

Nota: $\Delta S_{ciclo} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0$
Quest'ultimo risultato ($\Delta S_{ciclo} = 0$) e' atteso in quanto l'entropia e' una funzione di stato e quindi dipende solo dai parametri di stato del sistema.
In un qualcunque ciclo termodinamico, essendo lo stato iniziale uguale a quello finale, la variazione di entropia e' sempre nulla.