Esercizi su quantita' di moto e centro di massa dei sistemi - Fisica 1

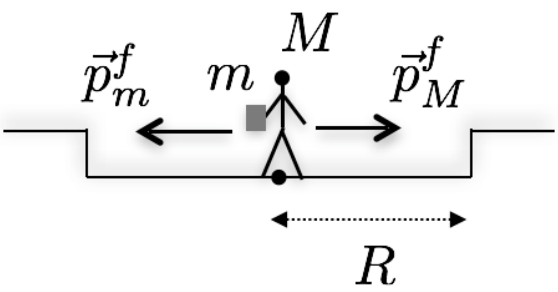
Esercizio 1

Un uomo di massa M=80 Kg si trova al centro di un laghetto ghiacciato circolare di raggio R=20m. Egli ha in mano uno zainetto di massa m=5Kg. Sapendo che - non essendoci attrito - non e' possibile camminare sulla superficie del lago, determinare come fa l'uomo a raggiungere la riva del lago in un tempo Δt minore di 160s.

Soluzione:

La risultante delle forze esterne e' nulla, dal momento che la forza peso (m+M)g viene bilanciata dalla reazione vincolare N perpendicolare alla superficie del lago. Essendo:
$\overrightarrow{F_{tot}^{ext}} = \frac{d\overrightarrow{p_{tot}}}{dt} = 0$ da cui il vettore quantita' di moto totale del sistema uomo+zainetto e' $\overrightarrow{p_{tot}} = costante$

Per muoversi, l'uomo puo' lanciare lo zainetto con una velocita' iniziale v_m in una direzione qualunque orizzontale.
Per la conservazione della quantita' di moto del sistema uomo+zainetto, l'uomo acquistera' nello stato finale una velocita' nella direzione opposta rispetto a quella dello zainetto. Infatti quantita' di moto iniziale e finale sono uguali:
$\overrightarrow{p_{tot}^{i}} = \overrightarrow{p_{tot}^{f}}$
Essendo $\overrightarrow{p_{tot}^{i}} = 0$ (tutti i corpi sono fermi) riusulta anche $\overrightarrow{p_{tot}^{f}} = 0$
$\overrightarrow{p_{tot}^{f}} = m\overrightarrow{v_m} + M\overrightarrow{v_M} = 0$ da cui $\overrightarrow{v_M} = -m/M\ \overrightarrow{v_m}$



Proiettando i vettori lungo l'asse orizzontale dove avviene il moto:
$v_M = -m/M\ v_m$
Assumendo che l'asse x orizzontale sia orientato verso la direzione di M (destra): $v_m < 0$ e quindi $v_M > 0$

Dopo il lancio moto di M e' rettilineo uniforme: $x(t) = v_M t$
Il corpo raggiunge la riva del lago in $t_R = R/v_M = \frac{R\,M}{|v_m| m}$
La condizione richiesta dal problema e' che
$t_R < \Delta t$ ovvero $|v_m| > \frac{R\,M}{m\Delta t} = 2m/s$

Quindi per raggiungere la riva, l'uomo deve lanciare lo zainetto con una velocita' orizzontale di 2m/s nella direzione opposta a quella verso la quale vuole muoversi.

Esercizio 2

Una chiatta di massa M=150 Kg e lunghezza L=5m e' ferma in acque calme, senza alcun ancoraggio, con un estremo A a contatto con la parete del molo. Inizialmente, un uomo di massa m=75 Kg si trova sulla chiatta in corrispondenza dell'estremo B opposto al molo. Ad un certo punto l'uomo inizia a camminare sulla chiatta (c'e' attrito tra uomo e chiatta) ed arriva all'estremo A, dove si ferma. Assumendo che non ci sia attrito tra la chiatta e l'acqua, determinare:
a) la posizione iniziale del centro di massa del sistema chiatta+uomo;
b) la posizione del centro di massa quando l'uomo ha raggiunto l'altro estremo della chiatta (stato finale);
c) la distanza tra l'estremo A della chiatta ed il molo nello stato finale.

Soluzione:

L'uomo puo' camminare sulla chiatta perche' c'e' attrito tra le scarpe e la superficie della barca.
Tramite questo contatto, l'uomo trasmette una forza orizzontale F(t) alla barca diretta verso il largo. Per il terzo principio della dinamica, la barca esercita una forza uguale ed opposta sull'uomo che quindi viene spinto verso il molo.
E' quindi evidente che mentre il corpo viene spinto verso il molo, la barca viene spinta verso il largo, e quindi entrambi i corpi si muovono.
Notare che la forza che l'uomo esercita sulla barca per muoversi e' variabile nel tempo: inizialmente l'uomo accelera partendo da fermo, mentre nella parte finale deve decelerare (invertire la forza) in modo tale da potersi fermare nel punto A. Queste forze sono forze interne al sistema uomo+chiatta ed hanno sempre risultante nulla istante per istante per il terzo principio della dinamica. Come queste forze variano nel tempo non e' rilevante ai fini di questo problema. Conta solo conoscere le condizioni che definiscono lo stato iniziale e finale del sistema.

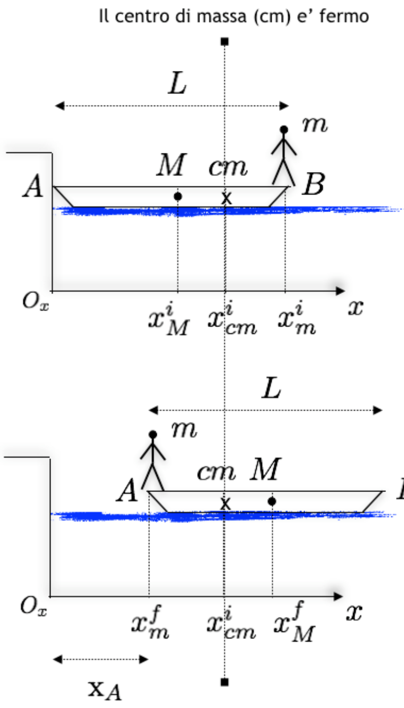
a)

Prendiamo come origine dell'asse x il molo, mentre la direzione e' quella verso l'acqua, come indicato in Figura. La posizione del centro di massa in questo sistema di riferimento e' dunque:

$$x_{cm} = \frac{mx_m^i + Mx_M^i}{m+M} = \frac{mL + ML/2}{m+M} = 3.33\ m$$

(Abbiamo assunto che il centro geometrico della chiatta coincida con il centro di massa della chiatta, che e' vero se la massa e' distribuita in maniera simmetrica attorno al centro geometrico)

Come ci si aspetta, il centro di massa si trova in un punto tra l'uomo ed il centro della chiatta.



b)

$$\overrightarrow{F_{tot}^{ext}} = \frac{d\overrightarrow{p_{tot}}}{dt} = 0$$
$\overrightarrow{p_{tot}^f} = \overrightarrow{p_{tot}^i} = 0$ (perche' inizialmente tutto e' fermo)

Per il teorema del centro di massa:
$p_{tot}^i = M_{tot}v_{cm}^i = p_{tot}^f = M_{tot}v_{cm}^f$ quindi
$$v_{cm}^i = v_{cm}^f = 0$$
Quindi il centro di massa resta fermo e la sua posizione e' quindi
$x_{cm} = 3.33m$

c)
Conoscendo quindi la posizione del centro di massa nello stato finale possiamo scrivere:

$$x_{cm} = \frac{mx_m^f + Mx_M^f}{m+M} = \frac{mX_A + M\left(X_A + \frac{L}{2}\right)}{m+M}$$
Dal punto a) sappiamo che:
$$x_{cm} = \frac{mx_m^i + Mx_M^i}{m+M} = \frac{mL + ML/2}{m+M}$$

Uguagliando le due relazioni si ricava: $X_A = \frac{mL}{m+M} = 1.67\ m$
Casi particolari:
1) M >> m risulta $X_A \sim 0$ se la chiatta fosse una nave (molto piu' pesante dell'uomo), l'estremo A non si muoverebbe dalla banchina.
2) M << m risulta $X_A \sim L$ se la chiatta fosse una sottile tavola di legno (molto piu' leggera dell'uomo), la chiatta scorre sotto i piedi dell'uomo che resta praticamente fermo. In questo caso infatti il centro di massa del sistema praticamente coincide con la posizione dell'uomo.