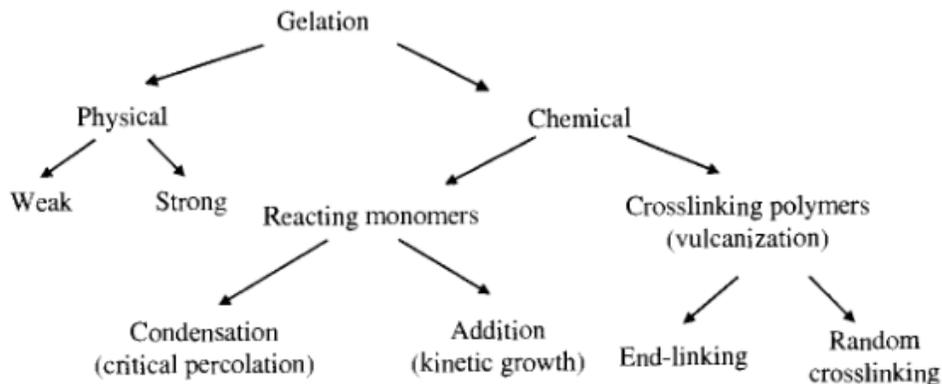


# 1 Percolazione

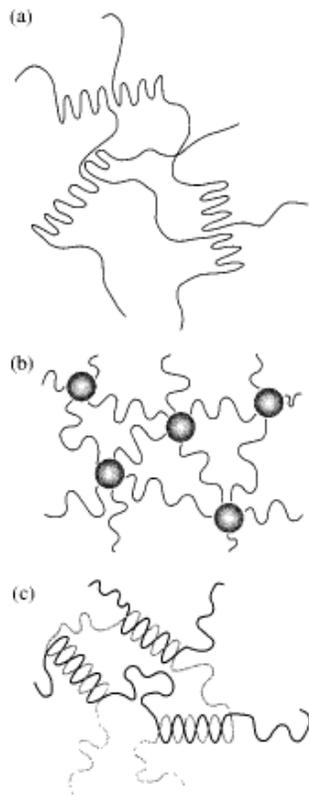
La percolazione affronta il problema puramente geometrico della connettività di un sistema di punti disposti nello spazio secondo una distribuzione predefinita. Nel caso più semplice i punti sono distribuiti su un reticolo (in  $d$  dimensioni). Dati i punti e la loro distribuzione, occorre fornire anche una definizione di connessione tra due punti. Si usa il termine site-percolation quando due punti adiacenti sono definiti connessi, di bond-percolation quando tra due punti esiste un legame che ha una sua probabilità di esistere. Una delle domande principali che si pone la teoria è la valutazione del valore del parametro di controllo (la densità di siti in site-percolation o la probabilità di legame in bond-percolation) per il quale il sistema raggiunge una configurazione percolante, cioè che include un cluster di dimensioni confrontabili a quelle del sistema. Altrettanto importante è predire il comportamento di osservabili che risentono delle proprietà di connettività in vicinanza della cosiddetta soglia di percolazione.

L'approccio percolativo è di particolare rilevanza nello studio dei sistemi polimerici e colloidali, in particolare modo per lo studio dello stato gel. I sistemi polimerici con molecole che formano cross-link chimici costituiscono uno dei sistemi nei quali la formazione di un network permanente dipende dalla funzionalità dei polimeri e dal numero di legami. I gels vengono divisi in due grandi categorie: gel chimici e gel fisici. Nei primi i legami sono il risultato di una reazione chimica e dunque la energia del legame, di molto superiore a  $kT$ , garantisce la stabilità del legame medesimo. Nei gel fisici, un aumento di temperatura anche modesto può fondere il gel, poiché l'energia del legame è dell'ordine di una decina di  $kT$ .

## Random branching and gelation



In vicinanza della soglia di percolazione, come nei fenomeni critici vicino il punto critico, molte proprietà connesse alla connettività mostrano leggi di scala (potenze), cioè mostrano l'assenza di una lunghezza caratteristica. La caratterizzazione degli esponenti di scala consente di stabilire la classe di universalità del fenomeno percolativo, in piena analogia con i fenomeni termici. Per imparare, esaminiamo prima il caso risolubile della bond-percolation in una dimensione, che ci consentirà di definire le grandezze utilizzate nella descrizione e le loro inter-relazioni.



**Fig. 6.3**  
Examples of strong physical gels with crosslinks that are: (a) lamellar microcrystals; (b) glassy nodules; (c) double helices.

## 1.1 1-d site percolation

In questo problema, il parametro di controllo esterno e' la probabilita'  $p$  di occupazione di un sito di una catena infinita. Questo modello unidimensionale e' chiaramente patologico, perche' la soglia di percolazione richiede che tutti i siti siano presenti, cioe' che  $p_c = 1$ . Quindi, in questo modello, possiamo solo studiare il comportamento per  $p < p_c$ .

La probabilita'  $p_s$  che un sito scelto a caso appartenga ad un cluster di size  $s$  e' data da

$$p_s = sp^s(1-p)^2 \quad (1)$$

Questa relazione ci dice che se "atterriamo" a caso su un sito, lo troviamo occupato con probabilita'  $p$ . Se vogliamo che altri  $s-1$  siti vicini siano occupati e contemporaneamente vogliamo che i due siti estremi della catena siano vuoti, si comprende il contributo  $p^s(1-p)^2$ . Se poi ci ricordiamo che possiamo "atterrare" su uno qualsiasi degli  $s$  siti, otteniamo la formula finale sopra scritta.

Naturalmente, se sommiamo  $p_s$  su tutte le sizes  $s$  dobbiamo trovare la probabilita' che il sito sia occupato. Infatti

$$\sum_{s=1}^{\infty} p_s = \sum_{s=1}^{\infty} sp^s(1-p)^2 = (1-p)^2 \sum_{s=1}^{\infty} sp^s = (1-p)^2 \sum_{s=1}^{\infty} p \frac{d}{dp} p^s = p(1-p)^2 \frac{d}{dp} \sum_{s=1}^{\infty} p^s \quad (2)$$

$$= p(1-p)^2 \frac{d}{dp} \frac{p}{1-p} = p(1-p)^2 \frac{1}{(1-p)^2} = p \quad (3)$$

Dalla conoscenza di  $p_s$  possiamo calcolare il numero di clusters di  $s$  siti  $N_s$  normalizzato sul numero di siti reticolari  $N$ . Definendo  $n_s \equiv N_s/N$  abbiamo, considerando che se moltiplichiamo ogni cluster per la sua size e sommiamo dobbiamo trovare il numero di siti occupati  $pN$ ,

$$\sum_{s=1}^{\infty} sn_s = p \quad (4)$$

Confrontando con la relazione precedentemente trovata  $\sum_{s=1}^{\infty} p_s = p$  troviamo

$$n_s = p^s(1-p)^2 \quad (5)$$

Il primo momento della distribuzione  $n_s$  altro non e' che il numero di siti occupati.

E' piu' interessante studiare il comportamento del secondo momento della distribuzione  $n_s$ , chiamato *mean cluster size*  $S$  e definito come

$$S = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} s^2 n_s}{\sum_{s=1}^{\infty} s n_s} = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} s^2 n_s}{p} \quad (6)$$

Il calcolo di  $S$  da

$$pS = \sum_{s=1}^{\infty} s n_s = (1-p)^2 \sum_{s=1}^{\infty} s^2 p^s = (1-p)^2 \left\{ p^2 \frac{d^2}{dp^2} \sum_{s=1}^{\infty} p^s + p \frac{d}{dp} \sum_{s=1}^{\infty} p^s \right\} = \quad (7)$$

$$= (1-p)^2 \left\{ p^2 \frac{d^2}{dp^2} \frac{p}{(1-p)} + p \frac{d}{dp} \frac{p}{(1-p)} \right\} \quad (8)$$

e sapendo che

$$\frac{d}{dp} \frac{p}{(1-p)} = \frac{1}{(1-p)^2} \quad (9)$$

$$\frac{d^2}{dp^2} \frac{p}{(1-p)} = \frac{d}{dp} \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{2}{(1-p)^3} \quad (10)$$

troviamo

$$pS = (1-p)^2 \left\{ \frac{2}{(1-p)^3} p^2 + \frac{1}{(1-p)^2} p \right\} = \frac{p(1+p)}{1-p} \quad (11)$$

da cui

$$S = \frac{1+p}{1-p} \quad (12)$$

Il mean cluster size diverge alla transizione percolativa  $p = 1$  secondo una legge di potenza con esponente  $-1$ .

Esaminiamo adesso la probabilita'  $g(r)$  che un sito occupato scelto a caso sia connesso ad un sito distante  $r$ , cioe' che siano parte di uno stesso cluster di almeno  $r$  siti. Questa probabilita' e' data da

$$g(r) = p^r \quad (13)$$

Infatti la connettivita' e' garantita se tutti gli  $r$  siti sono occupati. Possiamo riscrivere la stessa probabilita' come

$$g(r) = p^r = e^{-r/\xi} \quad (14)$$

dove abbiamo definito la lunghezza di connettività'  $\xi$  come

$$\xi = -\frac{1}{\ln p} \quad (15)$$

Quando ci avviciniamo alla transizione,  $p \rightarrow p_c \equiv 1$ , possiamo scrivere

$$\ln p = \ln p_c + (p - p_c) \quad (16)$$

ed intorno a  $p_c$

$$\ln p = \ln 1 + (p - p_c) \approx -|p - p_c| \quad (17)$$

e

$$\xi \sim \frac{1}{|p - p_c|} \quad (18)$$

Dunque la lunghezza di connettività' diverge alla transizione anche essa come una legge di potenza.

Le quantità'  $S$  e  $g(r)$  sono legate da una relazione integrale. Infatti, vale  $S = \sum_r g(r)$ ,

$$S = 1 + 2 \sum_r p^r = 1 + \frac{2p}{1-p} = \frac{1+p}{1-p} \quad (19)$$

dove il contributo 1 viene da  $r = 0$ , il 2 dal sommare gli  $r$  positivi e gli  $r$  negativi, con  $r = 1, \infty$ .

Infine, esaminiamo una maniera alternativa di scrivere  $n_s$ , per  $|p - p_c| \ll 1$ .

$$n_s = (1-p)^2 p^s = (1-p)^2 e^{s \ln(p)} = (p_c - p)^2 e^{-s(p-p_c)} \quad (20)$$

definendo una variabile  $x = s(p - p_c)$  possiamo scrivere

$$n_s = \frac{x e^{-x}}{s^2} = s^{-2} x e^{-x} = s^{-1} f(x) \quad (21)$$

che ci dice che  $n_s$  in vicinanza della percolazione e' scrivibile come una legge di potenza per una funzione di scala  $f(x)$  della variabile  $x$ . Notiamo che un grafico di  $s^2 n_s$  vs.  $x$  darebbe un completo "collasso" (data collapse) di tutte le curve, indipendentemente dal valore di  $p - p_c$ .

In sintesi, in vicinanza del punto critico in una dimensione, le proprietà' percolative sono sintetizzate nella seguente tabella.

Table 1: Results 1-d percolation

$$\left| \begin{array}{l} S \sim |p - p_c|^{-1} \\ \xi \sim |p - p_c|^{-1} \\ n_s \sim s^{-2} f[s|p - p_c|] \\ P_\infty = 0 \end{array} \right|$$

## 1.2 Bond percolation sul reticolo di Bethe

Il reticolo di Bethe e' un reticolo senza *loops*, in cui ogni sito e' connesso con  $z$  vicini. L'assenza di strutture cicliche consente il calcolo analitico delle proprieta' percolative. Iniziamo dal calcolo di  $p_c$ . Se chiamiamo  $p$  la probabilita' di esistenza di un legame, la probabilita' che un sito arbitrario scelto come origine sia connesso ad uno dei siti distanti un passo reticolare e'  $C_1 = zp$ . La probabilita' che sia connesso ad uno dei siti distanti due e'  $C_2 = (z-1)pC_1$ . Infatti ci sono  $z(z-1)$  siti distanti due e per essere connesso a ciascuno servono due bond ( $p^2$ ). La probabilita' che sia connesso ad un sito distante  $N$  passi sara'  $C_N = (z-1)pC_{N-1} = [(z-1)p]^{N-1}C_1$ . La probabilita' che il sito centrale sia connesso con l'infinito sara' zero se  $(z-1)p < 1$  e diversa da zero  $(z-1)p > 1$ . Il valore critico e' dunque dato da

$$p_c = \frac{1}{z-1} \quad (22)$$

Come passo intermedio, dobbiamo calcolare  $R(p)$ , definita come la probabilita' che un legame scelto a caso **non** sia connesso ad infinito attraverso uno dei due siti che congiunge. Se ora scegliamo un legame arbitrario del reticolo, esso e' "vuoto" con probabilita'  $1-p$  e "pieno" con probabilita'  $p$ . Poiche' da uno dei due siti scelti emanano  $z-1$  branche, avremo la relazione di consistenza

$$R(p) = 1 - p + pR(p)^{z-1} \quad (23)$$

la cui soluzione da  $R(p)$ . Nel caso risolubile analiticamente di  $z=3$ , abbiamo

$$R(p) = 1 - p + pR(p)^2 \quad (24)$$

che ha soluzione

$$R(p) = \frac{1 \pm (1-2p)}{2p} \quad (25)$$

La soluzione  $R(p) = 1$  e' sempre presente. La seconda soluzione

$$R(p) = \frac{1-p}{p}$$

appare solo quando  $R(p) < 1$  cioe' per  $p > 1/2 = p_c$ . Quindi, per  $p > p_c$ ,  $1 - R(p)$ , che e' la probabilita' che un legame arbitrariamente scelto sia connesso ad infinito diviene non nulla.

Calcoliamo ora  $P_\infty$ , la probabilita' che un legame "pieno", scelto a caso appartenga al cluster infinito. Naturalmente  $P_\infty = 0$  per  $p < p_c$ . La probabilita' che un legame pieno sia connesso ad infinito richiede che almeno una delle  $2z-2$  branche che partono dalle due estremita' del legame vada ad infinito. L'unico caso che non contribuisce e' che tutte le  $2z-2$  non siano connesse fino ad infinito. Dunque

$$P_\infty = 1 - R(p)^{2z-2} \quad (26)$$

(nota che alcuni definiscono  $P_\infty$  indipendentemente dall'assumere che il legame sia pieno e questo determina un ulteriore  $p$  nella definizione  $P_\infty = p(1 - R(p))^{2z-2}$ )

Per  $p < p_c$ ,  $R(p) = 1$  e dunque  $P_\infty = 0$ . Per studiare il comportamento di  $P_\infty$  intorno  $p_c$  guardiamo esplicitamente il caso  $z = 3$ , per il quale

$$P_\infty = \left[ 1 - \left( \frac{1-p}{p} \right)^4 \right] \quad (27)$$

Intorno a  $p_c$

$$P_\infty \approx \left[ 4 \left( \frac{1-p}{p} \right)^3 \frac{1}{p^2} \right]_{p=p_c} (p - p_c) = 16(p - p_c) \quad (28)$$

$P_\infty = 0$  cresce dunque con una legge di potenza intorno a  $p_c$  con esponente  $\beta = 1$ , tipico esponente di campo medio.

Esaminiamo ora il mean cluster size  $S$ , definito come dimensione del cluster media.  $S$  indica la dimensione media del cluster a cui appartiene un sito arbitrario. Chiamiamo con  $T$  la dimensione media del cluster di una branca del reticolo di Bethe. Anche per  $T$  e' possibile scrivere una relazione di ricorrenza

$$T = p(1 + (z-1)T) + (1-p)0 \quad (29)$$

$$T = p/[1 - p(z-1)] = \frac{pp_c}{p_c - p} \quad (30)$$

Questa espressione indica che il cluster size di una branca arbitraria ha la stessa dimensione media del cluster size di ogni sottobranca. Se il sito iniziale della branca e' occupato con probabilita'  $p$ , allora la sottobranca ha cluster size  $(1 + (z-1)T)$ . Se il sito di partenza e' vuoto la sottobranca ha cluster size 0.

Per calcolare ora  $S$ , scegliamo un sito occupato e scriviamo (sostituendo poi  $z = \frac{1+p_c}{p_c}$ )

$$S = 1 + zT = p_c \frac{1+p}{p_c - p} \sim (p_c - p)^{-1} \quad (31)$$

Il mean cluster size diverge con potenza  $\gamma = -1$

Diamo ora uno sguardo alla distribuzione delle dimensioni dei clusters. Qui entra molto chiaramente la topologia del reticolo di Bethe, perche' fa si che ogni cluster, indipendentemente dalla sua forma, ha lo stesso perimetro (definito come numero di legami confinanti con il cluster, o numero di siti vuoti confinanti con il cluster). Questa proprieta' (che e' vera in una dimensione ed in Bethe), consente di scrivere immediatamente

$$n_s = g_s p^s (1-p)^{t_s} \quad (32)$$

dove  $t_s$  e' il perimetro e  $g_s$  e' un termine combinatoriale che dice in quanti modi si puo' costruire un cluster di size  $s$ . Considerando site percolation, il primo sito ha  $z$  perimetri, ogni sito aggiunto, consuma un sito perimetrale ma ne aggiunge  $z-1$ . Da qui  $t_s = z + (s-1)(z-2) = 2 + s(z-2)$ . Poiche'  $g_s$  e' difficile da calcolare, consideriamo il rapporto tra  $n_s(p)$  e  $n_s(p_c)$ .

$$\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} = \frac{(1-p)^2 [p(1-p)^{(z-2)}]^s}{(1-p_c)^2 [p_c(1-p_c)^{(z-2)}]^s} \quad (33)$$

Se espandiamo  $y \equiv \frac{p(1-p)^{(z-2)}}{p_c(1-p_c)^{(z-2)}}$  intorno a  $p_c$  troviamo (sempre sostituendo  $z$  con  $p_c$ )

$$y \approx 1 + \frac{(p-p_c)^2}{2p_c^2(p_c-1)} \quad (34)$$

Da cui possiamo scrivere

$$\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} \approx \left(1 + \frac{(p-p_c)^2}{2p_c^2(p_c-1)}\right)^s = e^{s \log\left(1 + \frac{(p-p_c)^2}{2p_c^2(p_c-1)}\right)} = e^{-cs} \quad (35)$$

con  $c = \frac{(p-p_c)^2}{2p_c^2(p_c-1)}$

La conclusione di questo calcolo e' che, vicino a  $p_c$ ,

$$n_s(p) = n_s(p_c)e^{-cs} \quad (36)$$

dove, lo ricordiamo,  $n_s(p_c)$  ingloba  $g_s$ . Invece di calcolare (cosa possibile ma lunga per Bethe)  $g_s$ , prendiamo la soluzione per  $n_s(p_c)$  e continuiamo da li'. Questa soluzione, che per Bethe e' calcolabile analiticamente, diviene una unsatz per tutti gli altri casi. Assumiamo dunque che

$$n_s(p_c) \sim s^{-\tau} \quad (37)$$

e dunque

$$n_s(p) \sim s^{-\tau} e^{-cs} \quad (38)$$

L'esponente  $\tau$  puo' essere calcolato per consistenza. Infatti,  $S = \sum_s s^2 n_s$ . Possiamo scrivere

$$S = \sum s^{2-\tau} e^{-cs} \quad (39)$$

e, vicino a  $p_c$  dove il

$$S = \int_0^\infty s^{2-\tau} e^{-cs} ds \quad (40)$$

$$S = c^{\tau-3} \int_0^\infty (cs)^{2-\tau} e^{-cs} d(cs) \sim c^{\tau-3} \quad (41)$$

Poiche' sappiamo che  $S \sim (p_c - p)^{-1}$  dobbiamo concludere che  $2(\tau - 3) = -1$ , dove il 2 nasce dal fatto che  $c \sim (p - p_c)^2$ . Quindi troviamo  $\tau = \frac{5}{2}$ .

In sintesi, due esponenti insiti in  $n_s$  ( $\tau$  e l'esponente che controlla  $c$ ) determinano il valore di  $\gamma$  (e, si puo' mostrare, anche di  $P_\infty$ .)

## 2 Ipotesi di scaling

Quanto abbiamo imparato in una dimensione ed in Bethe suggerisce una validita' generale di  $n_s(p)$  vicino  $p_c$ . La teoria della percolazione postula che  $n_s(p)$  sia scrivibile vicino  $p_c$  come

$$n_s(p) \sim s^{-\tau} f[s^\sigma(p - p_c)] \quad (42)$$

dove  $f[z]$  e' una funzione di scala, dipendente dal modello, con delle opportune proprieta'. Vediamo come dal cluster size distribution cosi' definito (esponenti  $\tau$  e  $\sigma$ ) nascono le relazioni con gli esponenti  $\beta$  e  $\gamma$ . La relazione con  $\gamma$  si ottiene ripetendo quanto fatto per il calcolo di  $S$  si trova

$$\gamma = (\tau - 3)/\sigma \quad (43)$$

Senza alcuna pretesa di eccessiva formalita', possiamo ricavare la relazione per  $P_\infty$  a partire dal fatto che  $P_\infty + \sum s n_s = p$ . Poiche' a'  $p_c$ ,  $P_\infty = 0$  possiamo scrivere

$$P_\infty + \sum s(n_s - n_s(p_c)) = p - p_c \quad (44)$$

o, nell'ipotesi di scaling, trascurando termini in  $O(p - p_c)$  (che se del caso possono essere aggiunti a posteriori)

$$P_\infty = \int s^{1-\tau} (f[0] - f[z]) ds \quad (45)$$

Passando da  $ds$  a  $dz$  con  $dz = \sigma s^{\sigma-1} (p - p_c) ds = z/s ds$

$$P_\infty = \int s^{2-\tau} (f[0] - f[z]) dz/z = (p - p_c)^{-\frac{2-\tau}{\sigma}} \int z^{(2-\tau)/\sigma} (f[0] - f[z]) dz/z \quad (46)$$

$$P_\infty \sim (p - p_c)^{-(2-\tau)/\sigma} \quad (47)$$

da cui

$$\beta = \frac{2 - \tau}{\sigma} \quad (48)$$

### 3 La struttura dei clusters vicino $p_c$

Vicino  $p_c$  il sistema e' composto da clusters di tutte le dimensioni. Questi clusters hanno un raggio di girazione  $R_s$  che scala con la size del cluster  $s$ . Se fossero clusters compatti sapremmo gia' che  $R_s \sim s^{\frac{1}{d}}$ . Ma in linea di principio, oggetti ramificati come i cluster di percolazione possono scalare con esponenti diversi  $D < d$ . In tutta generalita' assumiamo  $R_s \sim s^{\frac{1}{D}}$ . La dimensione frattale dei clusters controlla l'esponente critico per la divergenza della lunghezza di connettivita'. Infatti la connettivita' misura la size media dei clusters.

Definiamo la lunghezza di connettivita' come

$$\xi^2 = \frac{\sum_s R_s^2 s^2 n_s}{\sum_s s^2 n_s} \quad (49)$$

dove ogni cluster di size  $s$  contribuisce con  $s^2$  distanze. Stiamo dunque calcolando la distanza media (al quadrato) di tutte le coppie connesse). Immediatamente vediamo, con le stesse tecniche di prima, che

$$\xi^2 = \frac{(p - p_c)^{-\frac{2/D+3-\tau}{\sigma}}}{(p - p_c)^{-\frac{3-\tau}{\sigma}}} \quad (50)$$

da cui

$$\xi \sim (p - p_c)^{-\nu} = (p - p_c)^{-\frac{1}{D\sigma}} \quad (51)$$

che da'

$$\nu = \frac{1}{D\sigma} \quad (52)$$

### 4 Il caso risolubile esattamente di Flory-Stockmayer

Nel caso di particelle con funzionalita'  $f$  che si aggregano senza formare loop chiuse, e' possibile mostrare che la distribuzione dei clusters e' data da

$$\boxed{N_n = N(1 - p_b)^f \frac{f(fn - n)!}{n!(fn - 2n + 2)!} [p_b(1 - p_b)^{f-2}]^{n-1}} \quad (53)$$

e che la percolazione e' raggiunta quando  $p_b^c = \frac{1}{f-1}$ . La struttura dei clusters a  $p_b^c$  e' dunque data da

$$N_n = N \left( \frac{f-2}{f-1} \right)^f \frac{f(fn - n)!}{n!(fn - 2n + 2)!} \left[ \frac{1}{f-1} \left( \frac{f-2}{f-1} \right)^{f-2} \right]^{n-1}$$

Approssimando i termini fattoriali usando la relazione di Stirling

$$\ln m! = m \ln(m) - m + \frac{1}{2} \ln(2\pi m)$$

$$\begin{aligned} \ln N_n = \ln N + f \ln \frac{f-2}{f-1} + \ln f + [(fn-n) \ln(fn-n) - (fn-n) + \frac{1}{2} \ln(2\pi(fn-n))] - [n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)] - \\ [(fn-2n+2) \ln(fn-2n+2) - (fn-2n+2) + \frac{1}{2} \ln(2\pi(fn-2n+2))] + (n-1) \ln \left[ \frac{1}{f-1} \left( \frac{f-2}{f-1} \right)^{f-2} \right] \end{aligned}$$

Scrivendo

$$(fn - 2n + 2) = n(f - 2) \left[ 1 + \frac{2}{n(f - 2)} \right]$$

il termine

$$\begin{aligned} (fn - 2n + 2) \ln(fn - 2n + 2) = n(f - 2) \left[ 1 + \frac{2}{n(f - 2)} \right] [\ln n(f - 2) + \ln \left[ 1 + \frac{2}{n(f - 2)} \right]] \approx \\ n(f - 2) \ln n(f - 2) + 2 \ln n(f - 2) - n(f - 2) \left[ 1 + \frac{2}{n(f - 2)} \right] \frac{2}{n(f - 2)} \approx n(f - 2) \ln n(f - 2) + 2 \ln n(f - 2) - 2 \end{aligned}$$

e analogamente

$$\frac{1}{2} \ln(2\pi(fn - 2n + 2)) = \frac{1}{2} \ln(2\pi n(f - 2)) + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \frac{2}{n(f - 2)} \right] \approx \frac{1}{2} \ln(2\pi n(f - 2)) - \frac{1}{n(f - 2)}$$

Troviamo cosi'

$$\ln N_n/N = f \ln \frac{f-2}{f-1} + \ln f + [n(f-1) \ln n + n(f-1) \ln(f-1) - (fn-n) + \frac{1}{2} \ln(2\pi(fn-n))] - [n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)]$$

$$\begin{aligned}
& -[n(f-2)\ln n + n(f-2)\ln(f-2) - n(f-2) + \frac{1}{2}\ln(2\pi(f-2)n) + 2\ln[n(f-2)] - 2 - \frac{1}{n(f-2)}] \\
& \quad + (n-1)\ln\frac{1}{f-1} + (n-1)(f-2)\ln\left(\frac{f-2}{f-1}\right)
\end{aligned}$$

ed ancora

$$\begin{aligned}
\ln(N_n/N) &= f\ln\frac{f-2}{f-1} + \ln f + [nf\ln n - n\ln n + n(f-1)\ln(f-1) - nf + \cancel{\frac{1}{2}\ln(2\pi n)} + \frac{1}{2}\ln(2\pi(f-1))] \\
& \quad - [n\ln n - \cancel{\frac{1}{2}\ln(2\pi n)}] - \\
& [nf\ln n - \cancel{2\ln n} + n(f-2)\ln(f-2) - nf + \cancel{2n} + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi(f-2)) + 2\ln[n(f-2)] - 2 - \frac{1}{n(f-2)}] \\
& \quad + (n-1)\ln\frac{1}{f-1} + (n-1)(f-2)\ln\left(\frac{f-2}{f-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\ln(N_n/N) = f\ln(f-2) - f\ln(f-1) + \ln f + \cancel{nf\ln n} + n(f-1)\ln(f-1) - \cancel{nf} + \cancel{\frac{1}{2}\ln(2\pi)} + \frac{1}{2}\ln(f-1)$$

$$\begin{aligned}
& -\cancel{nf\ln n} - n(f-2)\ln(f-2) + \cancel{nf} - \frac{1}{2}\ln(2\pi n) - \cancel{\frac{1}{2}\ln(2\pi)} - \frac{1}{2}\ln(f-2) - 2\ln[n(f-2)] + 2 + \frac{1}{n(f-2)} - (n-1)\ln(f-1) + \\
& \quad (n-1)(f-2)\ln(f-2) - (n-1)(f-2)\ln(f-1)
\end{aligned}$$

e raggruppando i termini in  $\ln(f-1)$  e  $\ln(f-2)$ ,

$$\begin{aligned}
\ln(N_n/N) &= \ln(f-2)[f - n(f-2) - \frac{1}{2} + (n-1)(f-2) - 2] \\
& \quad + \ln(f-1)[-f + n(f-1) + \frac{1}{2} - (n-1) - (n-1)(f-2)] \\
& \quad + \ln f - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln n - 2\ln n + \frac{1}{n(f-2)}
\end{aligned}$$

si trova così

$$\begin{aligned}
\ln(N_n/N) &= -\frac{1}{2}\ln(f-2) \\
& \quad - \frac{1}{2}\ln(f-1)
\end{aligned}$$

$$+ \ln f - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{5}{2} \ln n + \frac{1}{n(f-2)}$$

cioe' una legge di potenza per grandi  $n$

$$N_n = N \frac{f}{\sqrt{(f-1)(f-2)2\pi}} e^{-\frac{1}{n(f-2)}} n^{-\frac{5}{2}}$$

#### 4.1 Riassunto degli esponenti

Per Bethe:  $\tau = 5/2, \sigma = 1/2, D = 4$ .

In 3-d  $\tau = 2.18, \sigma = 0.45, D = 2.53$ .

Le relazioni tra esponenti critici e esponenti geometrici sono

$$\gamma = \frac{3 - \tau}{\sigma} \tag{54}$$

$$\beta = \frac{\tau - 2}{\sigma} \tag{55}$$

$$\nu = \frac{1}{D\sigma} \tag{56}$$