

Calcolo della funzione di partizione di singola particella

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int dp_x dp_y dp_z e^{-\beta p^2/2m} \int dx dy dz e^{\beta U_0 z/L}$$

$$= \frac{1}{h^3} \left(\int dp_x e^{-\beta p_x^2/2m} \right)^3 \pi R^2 \int_0^L dz e^{\beta U_0 z/L} = \frac{\pi R^2}{h^3} (2\pi m/\beta)^{3/2} \frac{L}{\beta U_0} (e^{\beta U_0} - 1)$$

Calcolo di $\langle E_1 \rangle$

$$\langle E_1 \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_1 = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{3}{2} \ln \beta - \ln \beta + \ln (e^{\beta U_0} - 1) \right)$$

$$= \frac{5}{2} k_B T - \frac{U_0 e^{\beta U_0}}{(e^{\beta U_0} - 1)}$$

Calcolo di C_V^1 (utilizzando $\beta = 1/k_B T$, $d\beta = -\frac{1}{k_B T^2} dT$)

$$C_V^1 = \frac{d}{dT} \langle E_1 \rangle = \frac{5}{2} k_B + \frac{1}{k_B T^2} \frac{d}{d\beta} \frac{U_0 e^{\beta U_0}}{(e^{\beta U_0} - 1)} =$$

$$= \frac{5}{2} k_B + \frac{1}{k_B T^2} \frac{U_0^2 e^{\beta U_0} (e^{\beta U_0} - 1) - U_0 e^{\beta U_0} U_0 e^{\beta U_0}}{(e^{\beta U_0} - 1)^2} =$$

$$\frac{5}{2} k_B - \frac{k_B}{k_B^2 T^2} \frac{U_0^2 e^{\beta U_0}}{(e^{\beta U_0} - 1)^2}$$

e dividendo per $e^{2\beta U_0}$ numeratore e denominatore

$$\frac{5}{2} k_B - k_B \frac{(\beta U_0)^2 e^{-\beta U_0}}{(1 - e^{-\beta U_0})^2}$$

Limiti di C_V^1 a bassa ed alta T

$$\beta \rightarrow 0 \quad C_v = \frac{3}{2} k_B$$

$$\beta \rightarrow \infty \quad C_v = \frac{5}{2} k_B$$

Calcoliamo $\langle z \rangle$

$$\langle z \rangle = \frac{\int z e^{\beta U_0 z/L} dz}{\int e^{\beta U_0 z/L} dz} = \frac{L}{\beta U_0} \frac{\int y e^y dy}{\int e^y dy} = \frac{L}{\beta U_0} \frac{y e^y | - \int e^y dy}{\int e^y dy}$$

$$\langle z \rangle = \frac{L}{\beta U_0} \left(-1 + \frac{y e^y}{\int e^y dy} \right) = \frac{L}{\beta U_0} \left(-1 + \frac{\beta U_0 e^{\beta U_0}}{e^{\beta U_0} - 1} \right) =$$

$$\langle z \rangle = L \left(-\frac{1}{\beta U_0} + \frac{e^{\beta U_0}}{e^{\beta U_0} - 1} \right) = L \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta U_0}} - \frac{1}{\beta U_0} \right)$$

Calcoliamo $P_N(n, \Omega)$. Ω definisce meta' delle y , meta' di p_x e meta' di z . Quindi

$$p_\Omega = \frac{1}{4} \frac{\int_0^{L/2} e^{\beta U_0 z/L} dz}{\int_0^L e^{\beta U_0 z/L} dz} = \frac{1}{4} \frac{\int_0^{L/2} e^y dy}{\int_0^L e^y dy} = \frac{1}{4} \frac{e^{\beta U_0/2} - 1}{e^{\beta U_0} - 1}$$

Per cui

$$P_N(n, \Omega) = \frac{N!}{(N-n)!n!} p_\Omega^n (1 - p_\Omega)^{N-n}$$

Calcoliamo la $G(\epsilon)$ classica

$$G(\epsilon) = \frac{1}{h^3} \int_V dx dy dz \int 2\pi p dp^2 \delta\left(\frac{p^2}{2m} - U_0 \frac{z}{L} - \epsilon\right)$$

con il cambio $y = \frac{p^2}{2m}$ e $t = U_0 \frac{z}{L}$

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= 2\pi \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \pi R^2 \frac{L}{U_0} \int_0^{U_0} dt \int_0^\infty y^{1/2} dy \delta(y - t - \epsilon) \\ &= 2\pi \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \pi R^2 \frac{L}{U_0} \int_0^{U_0} dt \theta(t + \epsilon) (t + \epsilon)^{1/2} = \end{aligned}$$

$$2\pi \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \pi R^2 \frac{L}{U_0} \left\{ \theta(\epsilon) \frac{2}{3} \left[(U_0 + \epsilon)^{3/2} - \epsilon^{3/2} \right] + (1 - \theta(\epsilon)) \theta(\epsilon + U_0) \frac{2}{3} \left[(U_0 + \epsilon)^{3/2} \right] \right\}$$

e considerando che $\theta(\epsilon)\theta(\epsilon + U_0) = \theta(\epsilon)$ (occorre fare un disegno dell' asse delle ϵ e disegnare le due θ , una che parte da $\epsilon = 0$ e l' altra che parte da $\epsilon = -U_0$)

$$2\pi \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \pi R^2 \frac{L}{U_0} \left\{ \theta(\epsilon) \frac{2}{3} \left[(U_0 + \epsilon)^{3/2} - \epsilon^{3/2} \right] + \theta(\epsilon + U_0) \frac{2}{3} \left[(U_0 + \epsilon)^{3/2} \right] - \theta(\epsilon) \frac{2}{3} \left[(U_0 + \epsilon)^{3/2} \right] \right\}$$

Che da' alla fine

$$2\pi \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \pi R^2 \frac{L}{U_0} \frac{2}{3} \left\{ -\theta(\epsilon) \left[\epsilon^{3/2} \right] + \theta(\epsilon + U_0) \left[(U_0 + \epsilon)^{3/2} \right] \right\}$$

Esiste la condensazione di Bose ? Occorre guardare il comportamento dell' integrale

$$I = \int_{-U_0}^\infty d\epsilon G(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon + U_0)} - 1}$$

Il termine dominante vicino l' energia minima si ha per $G(\epsilon) \sim [(U_0 + \epsilon)^{3/2}]$

$$I \approx \int_{-U_0}^\infty d\epsilon (U_0 + \epsilon)^{3/2} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon + U_0)} - 1} \approx \int_{-U_0}^\infty d\epsilon (U_0 + \epsilon)^{1/2}$$

che converge. Dunque sara' possibile trovare una T (o densita') sotto la quale il livello fondamentale si popola macroscopicamente. Quindi esiste una condensazione di Bose.

Il potenziale chimico per $T \rightarrow 0$ sara' $-U_0$. Ad alta T il potenziale chimico lo possiamo calcolare in modo classico (ricordando che $Z_N = \frac{Z_1^N}{N!}$)

$$\beta\mu = -\frac{\partial \ln Z_N}{\partial N} = -(\ln Z_1 - \ln N)$$

e ricordando che

$$Z_1 = \frac{\pi R^2}{h^3} (2\pi m/\beta)^{3/2} \frac{L}{\beta U_0} (e^{\beta U_0} - 1)$$

$$\mu = -k_B T \ln \frac{Z_1}{N}$$

Densita' del sistema in funzione dell' energia di Fermi.

L' energia di Fermi e' definita come l' energia del livello occupato superiore a $T = 0$. Quindi si tratta di integrare la $G(\epsilon)$ fino a ϵ_F ed uguagliare il risultato a N .

$$N = \int_{-U_0}^{\epsilon_F} d\epsilon G(\epsilon)$$

$$\frac{N}{\pi R^2 L} = 2\pi \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \frac{1}{U_0} \frac{2}{3} \int_{-U_0}^{\epsilon_F} d\epsilon \left\{ -\theta(\epsilon) \left[\epsilon^{3/2} \right] + \theta(\epsilon + U_0) \left[(U_0 + \epsilon)^{3/2} \right] \right\}$$

e ricordando che il secondo integrale serve solo se $\epsilon_F > 0$

$$\rho = 2\pi \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \frac{1}{U_0} \frac{2}{3} \left[\theta(\epsilon_F) \int_0^{\epsilon_F} \left[\epsilon^{3/2} \right] d\epsilon + \int_{-U_0}^{\epsilon_F} \left[(U_0 + \epsilon)^{3/2} \right] d\epsilon \right]$$

e finalmente

$$\rho = 2\pi \frac{2}{5} \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \frac{1}{U_0} \frac{2}{3} \left\{ \theta(\epsilon_F) \left[\epsilon_F^{5/2} \right] + \left[(U_0 + \epsilon_F)^{5/2} \right] \right\}$$

Calcoliamo ora $\langle z \rangle$ per $\epsilon_F = 0$. Calcoliamo su tutti gli stati con energia negativa, il valore medio di z

$$\langle z \rangle = \frac{\frac{1}{h^3} \int dp_x dp_y dp_z \int dx dy dz [1 - \theta(p^2/2m - U_0 z/L)]}{\frac{1}{h^3} \int dp_x dp_y dp_z \int dx dy dz [1 - \theta(p^2/2m - U_0 z/L)]}$$

il che vuol dire che gli integrali su p sono limitati da

$$\frac{p^2}{2m} < \frac{U_0 z}{L}$$

Possiamo quindi riscrivere

$$\langle z \rangle = \frac{\int dz \int_{p^2 < 2m U_0 z/L} 4\pi p^2 dp}{\int dz \int_{p^2 < 2m U_0 z/L} 4\pi p^2 dp}$$

$$\begin{aligned}
\langle z \rangle &= \frac{\int dz \frac{4\pi}{3} (2mU_0 z/L)^{3/2} z}{\int dz \frac{4\pi}{3} (2mU_0 z/L)^{3/2}} = \frac{\int dz z^{5/2}}{\int dz z^{3/2}} \\
&= \frac{2}{7} \frac{5}{2} \frac{L^{5/2}}{L^{3/2}} = \frac{5}{7} L
\end{aligned}$$