

Calcoliamo la $g(\epsilon)$

$$g(\epsilon) = \frac{1}{h^2} 2\pi A \int_0^\infty p dp \delta(c\sqrt{p^2 + m^2 c^2} - \epsilon)$$

e definendo $y = \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$, $dy = \frac{c}{2}(p^2 + m^2 c^2)^{-1/2} 2p dp$ = così che $p dp = y dy$

$$= \frac{1}{h^2} \frac{2\pi A}{c^2} \int_{mc^2}^\infty y dy \delta(y - \epsilon) =$$

$$g(\epsilon) = \frac{1}{h^2} \frac{2\pi A}{c^2} \epsilon \theta(\epsilon - mc^2)$$

Da qui, la probabilita' di trovare il sistema con energia ϵ e'

$$P(\epsilon) = \frac{g(\epsilon)e^{-\beta\epsilon}}{\int d\epsilon g(\epsilon)e^{-\beta\epsilon}} = \frac{\epsilon \theta(\epsilon - mc^2) e^{-\beta\epsilon}}{\int d\epsilon \epsilon \theta(\epsilon - mc^2) e^{-\beta\epsilon}} = \frac{\epsilon \theta(\epsilon - mc^2) e^{-\beta\epsilon}}{\int_{mc^2}^\infty d\epsilon \epsilon e^{-\beta\epsilon}} = \frac{\beta^2 \epsilon \theta(\epsilon - mc^2) e^{-\beta\epsilon}}{\int_{\beta mc^2}^\infty dz z e^{-z}} =$$

Se calcoliamo il denominatore

$$\int_{\beta mc^2}^\infty dz z e^{-z} = - \int_{\beta mc^2}^\infty z d e^{-z} = -z e^{-z} \Big|_{\beta mc^2}^\infty + \int_{\beta mc^2}^\infty e^{-z} dz = \beta mc^2 e^{-\beta mc^2} - e^{-z} \Big|_{\beta mc^2}^\infty = e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1)$$

per cui

$$P(\epsilon) = \frac{\beta^2 \epsilon \theta(\epsilon - mc^2) e^{-\beta\epsilon}}{e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1)} =$$

Per calcolare $\langle E_1 \rangle$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \langle E_1 \rangle &= \int_0^\infty P(\epsilon) \epsilon d\epsilon = \frac{\int_0^\infty \beta^2 \epsilon \theta(\epsilon - mc^2) e^{-\beta\epsilon} \epsilon d\epsilon}{e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1)} = \frac{1}{\beta} \frac{\int_{\beta mc^2}^\infty y^2 e^{-y} dy}{e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1)} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{-y^2 e^{-y} \Big|_{\beta mc^2}^\infty + 2 \int_{\beta mc^2}^\infty y e^{-y} dy}{e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1)} = \frac{1}{\beta} \frac{(\beta mc^2)^2 e^{-\beta mc^2} + 2 e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1)}{e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1)} \end{aligned}$$

che puo' essere riscritto anche in forme diverse come

$$= \frac{1}{\beta} \frac{(\beta mc^2)^2 + 2(\beta mc^2 + 1)}{(\beta mc^2 + 1)} = \frac{1}{\beta} \frac{(\beta mc^2)^2}{(\beta mc^2 + 1)} + 2k_B T = \frac{1}{\beta} \frac{\beta mc^2 (\beta mc^2 + 1) + \beta mc^2 + 2}{(\beta mc^2 + 1)} = mc^2 + \frac{mc^2 + 2k_B T}{(\beta mc^2 + 1)}$$

Calcolare ora $S(E)$. Possiamo calcolare Z_1 come, utilizzando la normalizzazione di $P(\epsilon)$ che abbiamo gia' calcolato

$$Z_1 = \int d\epsilon g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} = \frac{1}{h^2} 2\pi A \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1)$$

$$\frac{S}{k_B} = \beta E - \beta F = \beta E + \ln(Z_1^N / N!) = \beta N \langle E_1 \rangle + N \ln Z_1 - N \ln N + N$$

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{(\beta mc^2)^2}{(\beta mc^2 + 1)} + 2 + 1 + \ln \left\{ \frac{1}{h^2} \frac{2\pi A}{c^2} \frac{1}{N\beta^2} e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1) \right\}$$

e se si vuole si puo' anche riscrivere come

$$\frac{S}{Nk_B} = \ln \left\{ \frac{1}{h^2} \frac{2\pi A}{c^2} \frac{1}{N\beta^2} e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1) e^{\frac{(\beta mc^2)^2}{(\beta mc^2 + 1)} + 3} \right\}$$

Per calcolare l' energia piu' probabile occorre calcolare il massimo di $P(\epsilon)$. A parte le costanti, occorre massimizzare

$$P(\epsilon) \propto e^{-\beta\epsilon} \theta(\epsilon - mc^2)$$

Trascurando la θ il massimo e'

$$\frac{dP}{d\epsilon} = e^{-\beta\epsilon} - \beta\epsilon e^{-\beta\epsilon} = 0 \quad \rightarrow \quad \epsilon_{max} = k_B T$$

Naturalmente questa soluzione e' valida se $k_B T > mc^2$. Se $k_B T < mc^2$ vuol dire che il massimo e' fuori dalla finestra fisica, e dunque nella finestra fisica $\epsilon > mc^2$, la funzione e' sempre decrescente. Quindi il massimo coincide con il valore minimo di $\epsilon_{max} = mc^2$

La probabilita' che $n < N$ particelle abbiano energia $\epsilon < \epsilon_{max}$ e', per $k_B T > mc^2$ calcolabile come

$$p_{\epsilon < k_B T} = \int_{mc^2}^{k_B T} \frac{\beta^2 \epsilon e^{-\beta\epsilon}}{e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1)} d\epsilon = \frac{1}{e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1)} \int_{mc^2}^{k_B T} \beta \epsilon e^{-\beta\epsilon} d\beta \epsilon =$$

$$\frac{1}{e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1)} \int_{\beta mc^2}^{\beta k_B T} y e^{-y} dy = \frac{1}{e^{-\beta mc^2} (\beta mc^2 + 1)} (-2e^{-1} + (\beta mc^2 + 1)e^{-\beta mc^2})$$

(avendo usato $\int y e^{-y} dy = -(y+1)e^{-y}$). Possiamo anche riscrivere

$$p_{\epsilon < k_B T} = 1 - \frac{2e^{\beta mc^2 - 1}}{(\beta mc^2 + 1)}$$

Quindi

$$P(n, N) = \frac{n!}{N!(N-n)!} p_{\epsilon < k_B T}^n (1 - p_{\epsilon < k_B T})^{N-n}$$

Invece per $k_B T < mc^2$, non ci sono particelle con energia minore di mc^2 e dunque

$$P(n, N) = \delta_{n,0}$$

Per capire se esiste la transizione BE calcoliamo N con $\mu = \epsilon_{min} = mc^2$

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - mc^2)} - 1} d\epsilon$$

$$= \frac{1}{h^2} \frac{2\pi A}{c^2} \int_{mc^2}^{\infty} \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - mc^2)} - 1} d\epsilon$$

che diverge per $\epsilon \rightarrow mc^2$

L' energia media e'

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} z^{-1} - 1} d\epsilon$$

e

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} z^{-1} - 1} d\epsilon$$

Ad alta temperatura, $e^{\beta\epsilon} z^{-1} \gg 1$ e

$$\langle E \rangle = \frac{z}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon$$

e

$$N = z \int_{-\infty}^{\infty} g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon$$

e quindi

$$\langle E \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{\int_{-\infty}^{\infty} g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}$$

che coincide con la formula classica.

Passiamo ora ai fermioni. L' energia di Fermi e'

$$N = g_s \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = g_s \int_0^{\epsilon_F} \frac{1}{h^2} \frac{2\pi A}{c^2} \epsilon \theta(\epsilon - mc^2) d\epsilon = \frac{g_s}{h^2} \frac{2\pi A}{c^2} \int_{mc^2}^{\epsilon_F} \epsilon d\epsilon = \frac{g_s}{h^2} \frac{2\pi A}{c^2} \left(\frac{\epsilon_F^2}{2} - \frac{(mc^2)^2}{2} \right) \theta(\epsilon_F - mc^2)$$

per cui

$$\epsilon_F^2 = (mc^2)^2 + \frac{2Nh^2c^2}{g_s 2\pi A}$$

L' energia media per particella a $T = 0$ K in funzione di ϵ_F

$$\langle E \rangle = \frac{g_s}{N} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon = \frac{g_s}{N} \frac{1}{h^2} \frac{2\pi A}{c^2} \int_{mc^2}^{\epsilon_F} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{g_s}{N} \frac{1}{h^2} \frac{2\pi A}{c^2} \left(\frac{\epsilon_F^3}{3} - \frac{(mc^2)^3}{3} \right) \theta(\epsilon_F - mc^2)$$

per cui

$$\langle E \rangle = \frac{\left(\frac{\epsilon_F^3}{3} - \frac{(mc^2)^3}{3} \right)}{\left(\frac{\epsilon_F^2}{2} - \frac{(mc^2)^2}{2} \right)} = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_F^3 - (mc^2)^3}{\epsilon_F^2 - (mc^2)^2}$$

che si puo' anche scrivere, ricordando che

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{a + b}$$