

Iniziamo con il calcolare Z_1

$$Z_1 = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_0^{2L} dx e^{-\beta c|p| - \beta V(x)} = \frac{1}{h} 2 \int_0^{\infty} e^{-\beta c p} dp \left\{ \int_0^L dx e^{-\beta V_0(\frac{x}{L}-1)} + \int_L^{2L} dx \right\}$$

$$\frac{2}{h} \frac{1}{\beta c} \int_0^{\infty} e^{-y} dy \left\{ \frac{L}{\beta V_0} e^{\beta V_0} \int_0^{\beta V_0} dz e^{-z} + L \right\} = \frac{2L}{h\beta c} \left\{ \frac{1}{\beta V_0} e^{\beta V_0} (1 - e^{-\beta V_0}) + 1 \right\} = \frac{2L}{h\beta^2 c V_0} \left\{ e^{\beta V_0} - 1 + \beta V_0 \right\}$$

Per calcolare $\langle E_1 \rangle$,

$$\langle E_1 \rangle = -\frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} = 2k_B T - \frac{\partial \ln \{e^{\beta V_0} - 1 + \beta V_0\}}{\partial \beta} = 2k_B T - \frac{V_0 e^{\beta V_0} + V_0}{e^{\beta V_0} - 1 + \beta V_0}$$

Ad alta T , $\beta \rightarrow 0$ ed espandendo (attenzione ad espandere fino all'ordine corretto)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle E_1 \rangle = 2k_B T - \frac{V_0 + V_0}{1 + \beta V_0 - 1 + \beta V_0} = k_B T$$

Invece per T bassa, $\beta \rightarrow \infty$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \langle E_1 \rangle = 2k_B T - \frac{V_0 e^{\beta V_0}}{e^{\beta V_0}} = -V_0$$

Per calcolare la pressione in funzione di x ci ricordiamo che in un gas ideale

$$P = \rho k_B T$$

Dunque per avere $P(x)$ occorre calcolare $\rho(x)$. Ma $\rho(x)$ altro non e' che N volte la probabilita' di trovare una particella tra x e $x+dx$.

$$\rho(x) = N \frac{e^{-\beta V(x)}}{\int_0^{2L} e^{-\beta V(x)} dx}$$

Il denominatore lo avevamo precedentemente calcolato ed e'

$$\int_0^{2L} e^{-\beta V(x)} dx = \frac{L}{\beta V_0} (e^{\beta V_0} + \beta V_0 - 1)$$

Quindi

$$\begin{cases} r < L & \beta P(x) = \rho(x) = \frac{N}{L} \frac{\beta V_0 e^{-\beta V_0(\frac{x}{L}-1)}}{e^{\beta V_0} + \beta V_0 - 1} \\ L < r < 2L & \beta P(x) = \rho(x) = \frac{N}{L} \frac{\beta V_0}{e^{\beta V_0} + \beta V_0 - 1} \end{cases}$$

Per dimostrare che il numero di particelle tra 0 e L e' sempre maggiore di quello tra L e $2L$, occorre confrontare i due integrali di $\rho(x)$. Avendo lo stesso denominatore (la

normalizzazione) basta controllare i due numeratori. Il secondo integra la costante 1 (e^0). Il primo integra $e^{-\beta V_0(\frac{x}{L}-1)}$. Poiche' ($\frac{x}{L} - 1$) e' sempre negativo per $x < L$, ne consegue che l' argomento dell' esponenziale e' maggiore di 1 in tutti i punti. Dunque, il numero di particelle nella prima regione e' sempre maggiore di quello nella seconda.

Calcoliamo adesso la $g(\epsilon)$

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \frac{2}{h} \int_0^\infty dp \int_0^{2L} dx \delta(cp + V(q) - \epsilon) = \frac{2}{ch} \int_0^\infty dy \int_0^{2L} dx \delta(y + V(q) - \epsilon) = \frac{2}{ch} \int_0^{2L} dx \theta(\epsilon - V(q)) = \\ &= \frac{2}{ch} \left\{ \int_0^L dx \theta(\epsilon - V_0(x/L - 1)) + \int_L^{2L} dx \theta(\epsilon) \right\} = \frac{2}{ch} \left\{ \frac{L}{V_0} \int_{-V_0}^0 dt \theta(\epsilon - t) + L \theta(\epsilon) \right\} = \\ &= \frac{2L}{chV_0} \left\{ \int_{-V_0}^0 dt \theta(\epsilon - t) + V_0 \theta(\epsilon) \right\} = \end{aligned}$$

e dividendo i casi $\epsilon > 0$ (in cui l' integrale va da $-V_0$ a 0) ed $-V_0 < \epsilon < 0$ (in cui l' integrale va da $-V_0$ ad ϵ) si ottiene (struttando anche il fatto che $\theta(\epsilon + V_0)\theta(\epsilon) = \theta(\epsilon)$)

$$\begin{aligned} &= \frac{2L}{chV_0} \{ V_0 \theta(\epsilon) + (1 - \theta(\epsilon)) \theta(\epsilon + V_0) (\epsilon + V_0) + V_0 \theta(\epsilon) \} = \\ &= \frac{2L}{chV_0} \{ \theta(\epsilon + V_0) (\epsilon + V_0) + V_0 \theta(\epsilon) - \theta(\epsilon) (\epsilon + V_0) + V_0 \theta(\epsilon) \} \\ g(\epsilon) &= \frac{2L}{chV_0} \{ \theta(\epsilon + V_0) (\epsilon + V_0) - (\epsilon - V_0) \theta(\epsilon) \} \end{aligned}$$

Il valore minimo dell' energia e' $-V_0$ e dunque per capire se esiste la condensazione di BE guardiamo

$$N = \int_{-V_0}^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon+V_0)} - 1} d\epsilon$$

e si vede che l' integrale converge per $\epsilon \rightarrow \epsilon_{min} = -V_0$. Dunque esiste BE.

Per trovare una espressione di $\mu(T)$ (per $T > T_0$)

$$\begin{aligned} N &= \int_{-V_0}^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} z^{-1} - 1} d\epsilon \\ \frac{NchV_0}{2L} &= \int_{-V_0}^\infty \frac{\{ \theta(\epsilon + V_0) (\epsilon + V_0) - (\epsilon - V_0) \theta(\epsilon) \}}{e^{\beta\epsilon} z^{-1} - 1} d\epsilon \\ \frac{NchV_0}{2L\beta^2} &= \int_{-V_0}^\infty \frac{\beta\epsilon + \beta V_0}{e^{\beta\epsilon} z^{-1} - 1} d\beta\epsilon - \int_0^\infty \frac{\beta\epsilon - \beta V_0}{e^{\beta\epsilon} z^{-1} - 1} d\beta\epsilon \\ \frac{NchV_0}{2L\beta^2} &= \int_{-V_0}^\infty \frac{y + \beta V_0}{e^{yz^{-1}} - 1} dy - \int_0^\infty \frac{y - \beta V_0}{e^{yz^{-1}} - 1} dy \end{aligned}$$

$$\frac{NchV_0}{2L\beta^2} = \int_0^\infty \frac{t}{e^{t-\beta V_0} z^{-1} - 1} dt - \int_0^\infty \frac{y - \beta V_0}{e^y z^{-1} - 1} dy$$

che risolta fornisce un valore di z per $T > T_0$. Per $T < T_0$ il potenziale chimico resta fisso al valore $\epsilon_{min} = -V_0$.

Per $T \rightarrow \infty$, $z \ll 1$ e dunque

$$N \approx z \int_{-V_0}^\infty g(\epsilon) e^{-\beta \epsilon} d\epsilon = z Z_1$$

Ricordando che, visto che nel gas ideale $\beta PV = N$

$$N\beta\mu = \beta F + \beta PV = -\ln \frac{Z_1^N}{N!} + N = -N \ln Z_1 + N \ln N - N + N = -N \ln \frac{Z_1^{classico}}{N}$$

abbiamo che

$$\ln N = \beta\mu + \ln Z_1 \quad \rightarrow \quad \beta\mu = -\ln \frac{Z_1}{N}$$

Passiamo ora ai fermioni. Per trovare ϵ_F occorre risolvere

$$N = g_s \int_{-\infty}^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon$$

Ricordando che

$$g(\epsilon) = \frac{2L}{chV_0} \{ \theta(\epsilon + V_0)(\epsilon + V_0) - (\epsilon - V_0)\theta(\epsilon) \}$$

Se $\epsilon_F > 0$ contribuiscono tutti e due le funzioni θ e dunque

$$N = \frac{2Lg_s}{chV_0} \int_{-\infty}^{\epsilon_F} \{ \theta(\epsilon + V_0)(\epsilon + V_0) - (\epsilon - V_0)\theta(\epsilon) \} d\epsilon = \frac{2Lg_s}{chV_0} \left\{ \int_{-V_0}^{\epsilon_F} (\epsilon + V_0) d\epsilon - \int_0^{\epsilon_F} (\epsilon - V_0) d\epsilon \right\}$$

e con $t = \epsilon + V_0$ e $z = \epsilon - V_0$

$$= \frac{2Lg_s}{chV_0} \left\{ \int_0^{\epsilon_F + V_0} t dt - \int_{-V_0}^{\epsilon_F - V_0} z dz \right\} = \frac{2Lg_s}{2chV_0} \{ V_0^2 + (\epsilon_F + V_0)^2 - (\epsilon_F - V_0)^2 \} = \frac{Lg_s}{ch} \{ V_0 + 4\epsilon_F \}$$

e dunque

$$\epsilon_F = \frac{Nch}{4Lg_s} - \frac{V_0}{4}$$

quindi valida per $N > \frac{4Lg_s V_0}{4ch}$ Per N minore di questo valore, contribuisce solo la prima θ e dunque

$$N = \frac{2Lg_s}{chV_0} \int_{-\infty}^{\epsilon_F} \{ \theta(\epsilon + V_0)(\epsilon + V_0) - (\epsilon - V_0)\theta(\epsilon) \} d\epsilon = \frac{2Lg_s}{chV_0} \left\{ \int_{-V_0}^{\epsilon_F} (\epsilon + V_0) d\epsilon \right\} = \frac{2Lg_s}{chV_0} \left\{ \int_0^{\epsilon_F + V_0} t dt \right\} =$$

$$N = \frac{Lg_s}{chV_0}(\epsilon_F + V_0)^2$$

e dunque

$$\epsilon_F = \sqrt{\frac{NchV_0}{Lg_s}} - V_0$$

Determinare ora l' energia media per particella quando $\epsilon_F = 0$.

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N(\epsilon_F = 0)} \frac{2Lg_s}{chV_0} \int_{-V_0}^0 \epsilon(\epsilon + V_0) d\epsilon$$

e con $t = \epsilon + V_0$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N(\epsilon_F = 0)} \frac{2Lg_s}{chV_0} \int_0^{V_0} (t - V_0)t dt = \frac{1}{N(\epsilon_F = 0)} \frac{2Lg_s}{chV_0} \left\{ \frac{V_0^3}{3} - \frac{V_0^3}{2} \right\}$$

e

$$N(\epsilon_F = 0) = \frac{Lg_s}{ch} V_0$$

e

$$\langle E \rangle = -\frac{2}{6} V_0$$