

Corso di Meccanica Statistica Compito del 23/06/2023

Proff. S. Caprara, I. Giardina e F. Sciortino

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche, contenute nella regione unidimensionale $q \geq 0$ (q è una coordinata cartesiana, con le dimensioni di una lunghezza), con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(p, q) = c|p| + Aq ,$$

dove $c > 0$ e $A > 0$ sono parametri dimensionali. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T .

1. Meccanica Statistica Classica

Assumendo che sia applicabile la statistica classica:

- [3 punti] Calcolare l'energia interna per particella $u = U/N$ in funzione di T .
- [4 punti] Detti $N_>$ e $N_<$, rispettivamente, il numero di particelle con $q \geq \ell$ e $0 \leq q < \ell$, dove $\ell > 0$ è un parametro con le dimensioni di una lunghezza, calcolare il rapporto $N_>/N_<$ in funzione di T ; determinare i valori asintotici di tale rapporto per $\ell \gg \kappa_B T/A$ e $\ell \ll \kappa_B T/A$.
- [3 punti] Calcolare la probabilità P_K che esattamente K particelle abbiano impulso $|p| \geq \kappa_B T/c$.

2. Bosoni

Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:

- [4 punti] Dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein e determinare la temperatura di condensazione T_0 .
- [3 punti] Calcolare l'energia interna per particella $u = U/N$ in funzione di T , per $T \leq T_0$.
- [3 punti] Calcolare l'espressione asintotica del numero di particelle $N_>$ con $|p| > \alpha \kappa_B T/c$, per $0 < T \leq T_0$ e $\alpha \gg 1$.

3. Fermioni

Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2 e si trovi a $T = 0$:

- [3 punti] Determinare il valore dell'energia di Fermi ϵ_F in corrispondenza del quale il numero di particelle vale $N = \frac{2AL^2}{hc}$, dove $L > 0$ è un parametro con le dimensioni di una lunghezza.
- [4 punti] Detti $N_>$ e $N_<$, rispettivamente, il numero di particelle con $q \geq \ell$ e $0 \leq q < \ell$, dove $\ell > 0$ è un parametro con le dimensioni di una lunghezza, calcolare il rapporto $N_>/N_<$ in funzione di $\epsilon_F > 0$; determinare i valori asintotici di tale rapporto per $\ell \gg \epsilon_F/A$ e $\ell \ll \epsilon_F/A$.
- [3 punti] Calcolare la frazione $n_<$ di particelle con impulso $|p| \leq \frac{\epsilon_F}{2c}$, in funzione di $\epsilon_F > 0$.

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$; $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}$.

Risposte

1.a) Per un sistema di N particelle classiche non interagenti la funzione di partizione canonica è $Z_N = Z_1^N/N! \approx (Z_1 e/N)^N$ dove Z_1 è la funzione di partizione di singola particella. L'energia interna per particella assume dunque l'espressione $u = U/N = -\partial(\ln Z_1)/\partial\beta$, con $\beta \equiv (k_B T)^{-1}$. Abbiamo

$$Z_1 = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_0^{\infty} dq e^{-\beta H(p,q)} = \frac{2}{h} \int_0^{\infty} dp e^{-\beta cp} \int_0^{\infty} dq e^{-\beta Aq} = \frac{2}{hcA\beta^2}.$$

Quindi,

$$u = -\frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} = 2k_B T.$$

1.b) Abbiamo

$$\frac{N_{>}}{N_{<}} = \frac{\int_{\ell}^{\infty} dq e^{-\beta Aq}}{\int_0^{\ell} dq e^{-\beta Aq}} = \frac{e^{-\beta A\ell}}{1 - e^{-\beta A\ell}}.$$

Per $\beta A\ell \gg 1$ si ha $N_{>}/N_{<} \approx e^{-\beta A\ell} + O(e^{-2\beta A\ell})$; $\beta A\ell \ll 1$ si ha $N_{>}/N_{<} \approx (\beta A\ell)^{-1} + O(1)$.

1.c) La probabilità che una particella abbia impulso $|p| \geq \kappa_B T/c$ è

$$r = \frac{\int_{\kappa_B T/c}^{\infty} dp e^{-\beta cp}}{\int_0^{\infty} dp e^{-\beta cp}} = e^{-1}.$$

Quindi

$$P_K = \binom{N}{K} r^K (1-r)^{N-K} = \binom{N}{K} e^{-N} (e-1)^{N-K}.$$

2.a) Calcoliamo innanzitutto la densità degli stati

$$G(\epsilon) = \frac{2}{h} \int_0^{\infty} dp \int_0^{\infty} dq \delta(\epsilon - cp - Aq) = \frac{2}{Ah} \int_0^{\infty} dp \theta(\epsilon - cp) = \frac{2}{ch} \int_0^{\infty} dq \theta(\epsilon - Aq) = \frac{2}{hcA} \epsilon \theta(\epsilon),$$

dove i termini intermedi danno le distribuzioni congiunte delle variabili ϵ, p o ϵ, q , che ci serviranno in seguito. È evidente che l'energia minima di una particella è $\epsilon_{\min} = 0$.

Se il sistema è composto da N Bosoni, posto $\beta_0 \equiv (k_B T_0)^{-1}$, la condizione di condensazione è

$$N = \frac{2}{hcA} \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} = \frac{2(k_B T_0)^2}{hcA} \int_0^{\infty} dt \frac{t}{e^t - 1} = \frac{2(k_B T_0)^2}{hcA} \Gamma(2)\zeta(2) = \frac{2(k_B T_0)^2}{hcA} \zeta(2).$$

La convergenza dell'integrale dimostra che la condensazione esiste e avviene alla temperatura

$$T_0 = \frac{1}{k_B} \sqrt{\frac{hcAN}{2\zeta(2)}}.$$

2.b) L'energia interna per $T \leq T_0$ è quella delle sole particelle fuori dal condensato, quindi

$$u = \frac{2}{hcAN} \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon^2}{e^{\beta \epsilon} - 1} = \frac{2(k_B T)^3}{hcAN} \int_0^{\infty} dt \frac{t^2}{e^t - 1} = \frac{2(k_B T)^3}{hcAN} \Gamma(3)\zeta(3) = \frac{2\zeta(3)}{\zeta(2)} \frac{k_B T^3}{T_0^2}.$$

2.c) Per $0 < T \leq T_0$, le particelle con $|p| > \alpha \kappa_B T/c$ sono solo quelle fuori dal condensato, quindi

$$N_{>} = \frac{2}{Ah} \int_0^\infty d\epsilon \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} \int_{\alpha \kappa_B T/c}^\infty dp \theta(\epsilon - cp) = \frac{2}{hcA} \int_{\alpha \kappa_B T}^\infty d\epsilon \frac{\epsilon - \alpha \kappa_B T}{e^{\beta\epsilon} - 1}$$

$$\approx \frac{2}{hcA} \int_{\alpha \kappa_B T}^\infty d\epsilon (\epsilon - \alpha \kappa_B T) e^{-\beta\epsilon} = \frac{2(\kappa_B T)^2}{hcA} e^{-\alpha} \int_0^\infty dt t e^{-t} = \frac{2(\kappa_B T)^2}{hcA} e^{-\alpha}.$$

3.a) Il numero di fermioni a temperatura nulla è dato da

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} d\epsilon G(\epsilon) = \frac{4}{hcA} \theta(\epsilon_F) \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon = \frac{2\epsilon_F^2}{hcA} \theta(\epsilon_F)$$

dove ϵ_F è l'energia di Fermi e un fattore 2 viene dalla degenerazione di spin. Ponendo $N = \frac{2AL^2}{hc}$, si ricava $\epsilon_F = AL$.

3.b) Assunto $\epsilon_F > 0$, si ha

$$\frac{N_{>}}{N_{<}} = \frac{\int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \int_\ell^\infty dq \theta(\epsilon - Aq)}{\int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \int_0^\ell dq \theta(\epsilon - Aq)} = \frac{\int_0^{\epsilon_F} d\epsilon (\epsilon - A\ell) \theta(\epsilon - A\ell)}{\int_0^{\epsilon_F} d\epsilon [\epsilon \theta(A\ell - \epsilon) + A\ell \theta(\epsilon - A\ell)]}$$

$$= \frac{(\epsilon_F - A\ell)^2 \theta(\epsilon_F - A\ell)}{(A\ell)^2 \theta(\epsilon_F - A\ell) + \epsilon_F^2 \theta(A\ell - \epsilon_F) + 2A\ell(\epsilon_F - A\ell) \theta(\epsilon_F - A\ell)}$$

$$= \frac{(\epsilon_F - A\ell)^2 \theta(\epsilon_F - A\ell)}{\epsilon_F^2 \theta(A\ell - \epsilon_F) + A\ell(2\epsilon_F - A\ell) \theta(\epsilon_F - A\ell)}.$$

Evidentemente, per $\epsilon_F \ll A\ell$ si ha $N_{>}/N_{<} = 0$ e per $\epsilon_F \gg A\ell$ si ha $N_{>}/N_{<} \approx \frac{\epsilon_F}{2A\ell} \left[1 + O\left(\frac{A\ell}{\epsilon_F}\right) \right]$.

3.c) Si ha

$$n_{<} = \frac{\int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \int_0^{\epsilon_F/(2c)} dp \theta(\epsilon - cp)}{\int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \int_0^\infty dp \theta(\epsilon - cp)} = \frac{\int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \left[\epsilon \theta\left(\frac{\epsilon_F}{2} - \epsilon\right) + \frac{\epsilon_F}{2} \theta\left(\epsilon - \frac{\epsilon_F}{2}\right) \right]}{\frac{1}{2}\epsilon_F^2} = \frac{\frac{1}{8}\epsilon_F^2 + \frac{1}{4}\epsilon_F^2}{\frac{1}{2}\epsilon_F^2} = \frac{3}{4}.$$