

Corso di Meccanica Statistica - Compito del 26/6/2026
Proff. S. Caprara, I. Giardina e F. Sciortino

Si consideri un gas costituito da N particelle identiche classiche, di massa m , non interagenti, confinate sul piano Oxy di un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Il sistema è in equilibrio con un termostato alla temperatura T . L'Hamiltoniana di singola particella è

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + Ax^2,$$

dove $p \equiv |\vec{p}|$, $\vec{r} = (x, y)$, con $-\frac{L}{2} \leq y \leq \frac{L}{2}$. $L > 0$ e $A > 0$ sono costanti dimensionali.

Per i calcoli numerici si usino i valori $N = 10^{20}$, $m = 8 \times 10^{-26}$ kg, $L = 4$ m, $A = 4 \times 10^{-22}$ J/m²; la costante di Boltzmann è $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K, la costante di Planck è $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J·s.

1. [4 punti] Determinare l'energia interna per particella u , in funzione di T .
2. [4 punti] Determinare il valore medio di $d^2 \equiv x^2 + y^2$, $\langle d^2 \rangle$, in funzione di T .
3. [2 punti] Calcolare il valore numerico di $\sqrt{\langle d^2 \rangle}$ per $T = 300$ K.

Si assuma ora che le particelle siano bosoni con spin $s = 0$.

4. [4 punti] Determinare la temperatura di condensazione T_0 , in funzione di N .
5. [2 punti] Calcolare il valore numerico di T_0 .
6. [4 punti] Calcolare la frazione di particelle nel condensato per $T = \frac{1}{9}T_0$.

Si assuma ora che le particelle siano fermioni con spin $s = \frac{1}{2}$ e il gas si trovi a $T = 0$ K.

7. [4 punti] Determinare l'energia di Fermi ϵ_F , in funzione di N .
8. [2 punti] Calcolare il valore numerico della temperatura di Fermi $T_F \equiv \epsilon_F/k_B$.
9. [4 punti] Determinare il valore medio e il valore massimo di $|x|$, rispettivamente $\langle |x| \rangle$ e $|x|_{\max}$, in funzione di ϵ_F .

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$; $\zeta(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}$. Si ha $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.886$; $\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2.61$; $\int_0^\infty dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$; $\int_0^\infty dx x^2 e^{-ax^2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$.

Risoluzione

Particelle classiche

1. Posto $\beta \equiv (k_B T)^{-1}$, la funzione di partizione di singola particella è

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{2\pi}{h^2} \int_0^\infty dp p \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-L/2}^{+L/2} dy e^{-\beta \frac{p^2}{2m} - \beta A x^2} \\ &= \frac{4\pi L}{h^2} \int_0^\infty dp p e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \int_0^\infty dx e^{-\beta A x^2} = \frac{2\pi^{3/2} L m}{h^2 A^{1/2} \beta^{3/2}}. \end{aligned}$$

L'energia interna per particella è

$$u = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_1 = \frac{3}{2\beta} = \frac{3}{2} k_B T,$$

che è il risultato atteso per una hamiltoniana con tre gradi di libertà quadratici.

2. Per la linearità della media, si ha

$$\langle d^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty dx x^2 e^{-\beta A x^2}}{\int_0^\infty dx e^{-\beta A x^2}} + \frac{\int_0^{L/2} dy y^2}{\int_0^{L/2} dy} = \frac{k_B T}{2A} + \frac{L^2}{12}.$$

3. Posto $T = 300$ K e utilizzando i valori assegnati per gli altri parametri, si trova

$$\sqrt{\langle d^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{2A} + \frac{L^2}{12}} = 2.55 \text{ m}.$$

Bosoni

Calcoliamo innanzitutto la densità degli stati

$$g(\epsilon) = \frac{g_s}{h^2} \int d^2\vec{r} d^3\vec{p} \delta(\mathcal{H} - \epsilon)$$

dove $g_s = 2s + 1$ è la degenerazione di spin. Con il cambio di variabili $t = p^2/(2m)$, $dt = p dp/m$, si ha

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \frac{2\pi L m g_s}{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\infty} dt \delta(t + Ax^2 - \epsilon) \\ &= \frac{2\pi L m g_s}{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \theta(\epsilon - Ax^2) = \frac{4\pi L m g_s}{h^2} \int_0^{\sqrt{\epsilon/A}} dx \theta(\epsilon) = \frac{4\pi L m g_s}{h^2 A^{1/2}} \epsilon^{1/2} \theta(\epsilon). \end{aligned}$$

Notiamo che l'energia minima è $\epsilon_{\min} = 0$. Dal passaggio intermedio, deduciamo la densità degli stati congiunta per l'energia e la coordinata x ,

$$g(\epsilon, x) = \frac{2\pi L m g_s}{h^2} \theta(\epsilon - Ax^2),$$

che utilizzeremo in seguito.

4. Poniamo $g_s = 1$. Per trovare la temperatura di condensazione T_0 , essendo $\epsilon_{\min} = 0$, scriviamo

$$N = \int_0^{\infty} \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{4\pi L m}{h^2 A^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{4\pi L m}{h^2 A^{1/2} \beta_0^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right),$$

da cui,

$$T_0 = \frac{1}{k_B} \left[\frac{h^2 A^{1/2} N}{4\pi L m \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \right]^{2/3}.$$

5. Sostituendo i valori assegnati per i parametri e le costanti numeriche si ha

$$T_0 = 1.50 \text{ K}.$$

6. Per $T < T_0$, le particelle fuori dal condensato sono

$$N_{>} = \int_0^{\infty} \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{4\pi L m}{h^2 A^{1/2} \beta^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right).$$

Allora,

$$\frac{N_0}{N} = \frac{N - N_{>}}{N} = 1 - \frac{N_{>}}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}$$

e, per $T = \frac{1}{9}T_0$, si ha

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{3/2} = \frac{26}{27} \approx 0.963 = 96.3\%.$$

Fermioni

In questo caso poniamo $g_s = 2$. Poiché $\epsilon_{\min} = 0$, nel seguito assumeremo $\epsilon_F \geq 0$.

7. Il numero di particelle è dato da

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{8\pi Lm}{h^2 A^{1/2}} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{1/2} d\epsilon = \frac{16\pi Lm}{3h^2 A^{1/2}} \epsilon_F^{3/2},$$

da cui

$$\epsilon_F = \left(\frac{3h^2 A^{1/2} N}{16\pi Lm} \right)^{2/3}.$$

8. Sostituendo i valori assegnati per i parametri e le costanti numeriche si ha

$$T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B} = 2.17 \text{ K}.$$

9. Avevamo trovato sopra che

$$g(\epsilon, x) = \frac{4\pi Lm}{h^2} \theta(\epsilon - Ax^2)$$

quindi,

$$\begin{aligned} \langle |x| \rangle &= \frac{1}{N} \int_0^{\epsilon_F} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| g(\epsilon, x) dx d\epsilon \\ &= \frac{4\pi Lm}{h^2 AN} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon = \frac{2\pi Lm \epsilon_F^2}{h^2 AN}. \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione per N in funzione di ϵ_F , troviamo

$$\langle |x| \rangle = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\epsilon_F}{A}}.$$

Evidentemente $\epsilon_F = A|x|_{\max}^2$, per cui

$$|x|_{\max} = \sqrt{\frac{\epsilon_F}{A}} \quad \Rightarrow \quad \langle |x| \rangle = \frac{3}{8} |x|_{\max}.$$