Densita' degli stati...

Prova in itinere del 23.11.2019

Si consideri un sistema bidimensionale costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, con Hamiltoniana di singola particella:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

con

$$V(r) = \begin{cases} V_0[(\frac{r}{R})^2 - 1] & 0 \leq r < R \\ 0 & R \leq r < 2R \\ \infty & R > 2R \end{cases}$$

Calcoliamo la $G(\epsilon)$ classica

$$G(\epsilon) = \frac{1}{h^2} \int_V dxdy \int dp_x dp_y \delta\left(\frac{p^2}{2m} + V(r) - \epsilon\right)$$

con il cambio $y = \frac{p^2}{2m}$

$$mdy = pdp$$

e passando a coordinate cilindriche

$$G(\epsilon) = m\frac{(2\pi)^2}{h^2} \int_0^{2R} rdr \int_0^{\infty} dy \delta\left(y + V(r) - \epsilon\right) = m\frac{(2\pi)^2}{h^2} \int_0^{2R} rdr\theta(\epsilon - V(r))$$

$$= m\frac{(2\pi)^2}{h^2} \left[\int_0^{R} rdr\theta(\epsilon - V(r)) + \int_R^{2R} rdr\theta(\epsilon)\right]$$

Guardiamo il primo dei due integrali

$$\int_0^R rdr\theta(\epsilon - V(r)) = \int_0^R rdr\theta\left(\epsilon - V_0\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1\right]\right)$$

e cambiando variabile

$$t = V_0\left(\frac{r}{R}\right)^2 \qquad dt = \frac{V_0}{R^2}2rdr$$

$$\int_0^R rdr\theta(\epsilon - V(r)) = \frac{R^2}{2V_0}\int_0^{V_0} dt\theta(\epsilon - t + V_0)$$

Dovendo integrare tra 0 e V_0 abbiamo 3 possibilita' per $\epsilon + V_0$. e tre diversi valori per l' integrale

$$\begin{cases} \epsilon + V_0 < 0 & 0 \\ 0 < \epsilon + V_0 < V_0 & \int_0^{\epsilon+V_0} dt = (\epsilon + V_0) \\ \epsilon + V_0 > V_0 & \int_0^{V_0} dt = V_0 \end{cases}$$

Quindi avremo

$$\int_0^R rdr\theta(\epsilon - V(r)) = \frac{R^2}{2V_0}\theta(\epsilon + V_0)\left[(\epsilon + V_0)[1 - \theta(\epsilon)] + V_0\theta(\epsilon)\right] =$$

e considerando che $\theta(\epsilon + V_0)\theta(\epsilon) = \theta(\epsilon)$

$$\frac{R^2}{2V_0}\theta(\epsilon + V_0)\left[(\epsilon + V_0) - \epsilon\theta(\epsilon)\right] = \frac{R^2}{2V_0}\left[(\epsilon + V_0)\theta(\epsilon + V_0) - \epsilon\theta(\epsilon)\right]$$

Guardiamo adesso il secondo integrale

$$\int_R^{2R} rdr\theta(\epsilon) = \theta(\epsilon)\frac{4R^2 - R^2}{2} = \theta(\epsilon)\frac{3R^2}{2}$$

La somma dei due integrali da

$$G(\epsilon) = m\frac{(2\pi)^2}{h^2}\frac{R^2}{2V_0}\left[(\epsilon + V_0)\theta(\epsilon + V_0) + (3V_0 - \epsilon)\theta(\epsilon)\right]$$

L' energia minima e' naturalmente $-V_0$.

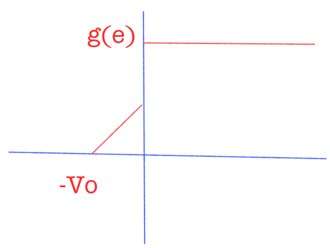

Figure 1: Graphic representation of $G(\epsilon)$

Compito del 30.01.2019

Si consideri un sistema unidimensionale costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(p, q) = A|p| + B(a - q) \qquad 0 < x < a$$

con A a B costanti positive. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T. Calcoliamo la $G(\epsilon)$ classica

$$G(\epsilon) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_0^a dx\delta(A|p_x| + B(a - x) - \epsilon)$$

Effettuiamo un cambio di variabile $y = Ap_x$ e $t = B(a - x)$,

$$G(\epsilon) = \frac{2}{h}\frac{1}{A}\frac{1}{-B}\int_0^\infty dy \int_{Ba}^0 dt\delta(y + t - \epsilon) = \frac{2}{ABh}\int_0^\infty dy \int_0^{Ba} dt\delta(y + t - \epsilon)$$

Affinche la δ abbia un ruolo, occorre che $\epsilon - t > 0$, in modo tale che la delta si annulli per un valore positivo di y, quindi dentro il range di interazione

$$G(\epsilon) = \frac{2}{ABh}\int_0^{Ba} dt\theta(\epsilon - t) =$$

Guardando l'asse t, l' integrale e' tra 0 e Ba. $\epsilon - t > 0$ richiede che $t < \epsilon$. Dunque abbiamo 3 regioni in cui puo' giacere ϵ. $\epsilon < 0$, $0 < \epsilon < Ba$, $\epsilon > Ba$. Nella prima regione l' integrale e' nullo. Quindi ci vuole, davanti a tutto una $\theta(\epsilon)$. Nel secondo intervallo, che possiamo quantificare com $\theta(\epsilon) * (1 - \theta(\epsilon - bA))$ si integra da 0 a ϵ e nella terza regione $(\theta(\epsilon - bA))$ si integra su tutto il range. Per cui

$$G(\epsilon) = \frac{2}{ABh}\theta(\epsilon)\left[\epsilon\theta(\epsilon) * (1 - \theta(\epsilon - bA)) + aB\theta(\epsilon - bA)\right]$$

Considerando che $\theta(\epsilon)\theta(\epsilon - bA) = \theta(\epsilon - bA)$,

$$G(\epsilon) = \frac{2}{ABh}\left[\epsilon\theta(\epsilon) + (aB - \epsilon)\theta(\epsilon - bA)\right]$$

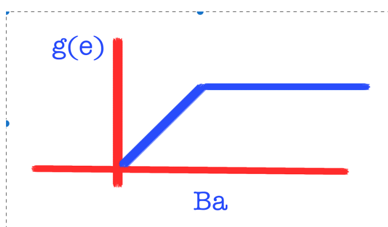

Figure 2: Rappresetazione grafica di $G(\epsilon)$. Per $0 < \epsilon < Ba$ c'e' un aumento di stati, poi si raggiunge un valore costante. Per ogni x esiste un valore di p_x tale che $H(x, p_x) = \epsilon$.

Compito del 13.02.2019

Si consideri un gas perfetto bidimensionale composto da N molecole biatomiche uguali non interagenti, ciascuna composta da due particelle uguali di massa m, con Hamiltoniana di singola molecola:

$$H(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{k}{2}|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2$$

dove k è una costante positiva. Il gas, contenuto in volume quadrato di lato L, è a contatto con un bagno termico a temperatura T. Calcoliamo la $G(\epsilon)$ classica

$$G(\epsilon) = \frac{1}{h^4} \int d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \int \delta(\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{k}{2}|\vec{q}_1 - \vec{q}_2|^2 - \epsilon) =$$

Definendo $t = \frac{k}{2}|\vec{q}_1 - \vec{q}_2|^2$, ed integrando su $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_1 - \vec{q}_2$

$$\frac{L^2}{h^4}\frac{2}{k}\pi \int dt \int d\vec{p}_1 \int d\vec{p}_2 \delta(\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + t - \epsilon) =$$

$$\frac{L^2}{h^4} 4m^2 \frac{2}{k}\pi^3 \int dt \int dy_1 \int dy_2 \delta(y_1 + y_2 + t - \epsilon) =$$

Poiche' $\delta(y_1 + y_2 + t - \epsilon)$ fissa il valore di y_2 a $y_2 = \epsilon - y_1 - t$ e poiche' y_2 deve essere positivo affinche' l'integrale della delta faccia 1, abbiamo

$$\frac{L^2}{h^4} 4m^2 \frac{2}{k}\pi^3 \int dt \int dy_1 \theta(\epsilon - y_1 - t)$$

ora integriamo su y_1. La θ ci dice che $y_1 < \epsilon - t$. Se $\epsilon - t$ e' minore di 0, l' integrale e' nullo. Se $\epsilon - t > 0$, l' integrale andra' da 0 a $\epsilon - t$

$$\frac{L^2}{h^4} 4m^2 \frac{2}{k} 2\pi^3 \int dt \theta(\epsilon - t) \int_0^{\epsilon - t} dy_1 = \frac{L^2}{h^4} 4m^2 \frac{2}{k} 2\pi^3 \int dt (\epsilon - t)\theta(\epsilon - t)$$

Anche qui la $\theta(\epsilon - t)$ ci dice che $\epsilon < t$. Se $\epsilon < 0$, l' integrale e' nullo, se $\epsilon > 0$ l' integrale va da 0 a ϵ. Per cui

$$= \frac{L^2}{h^4} 4m^2 \frac{2}{k} 2\pi^3 \theta(\epsilon) \int_0^{\epsilon} t dt (\epsilon - t) = \frac{L^2}{h^4} 4m^2 \frac{2}{k}\pi^3 \theta(\epsilon) \left(\epsilon^2 - \frac{\epsilon^2}{2}\right) = \frac{L^2}{h^4} 4m^2 \frac{2}{k}\pi^3 \frac{\epsilon^2}{2}\theta(\epsilon)$$

Compito del 15.07.2019

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, vincolate a muoversi su un piano, in una regione di area A, con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + m^2 c^2}$$

In sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T. Calcoliamo la $G(\epsilon)$ classica

$$G(\epsilon) = \frac{1}{h^2} \int_V dx dy \int dp_x dp_y \delta(c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + m^2 c^2} - \epsilon)$$

con il cambio $y = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$

$$dy = \frac{1}{2}c\frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}2pdp \qquad ydy = c^2pdp$$

e

$$G(\epsilon) = \frac{2\pi}{h^2}A\int_0^\infty pdp\delta(c\sqrt{p^2 + m^2c^2} - \epsilon) = \frac{2\pi}{c^2h^2}A\int_{mc^2}^\infty ydy\delta(y - \epsilon) =$$

$$= \frac{2\pi A}{c^2h^2}\theta(\epsilon - mc^2)\epsilon$$

Compito del 22.06.2018

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche non interagenti contenute in un cilindro C di base circolare con raggio R ed altezza L. Sia la Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{p^2}{2m} - U_0\frac{z}{L}$$

In sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T. Calcoliamo la $G(\epsilon)$ classica

$$G(\epsilon) = \frac{1}{h^3}\int_V dxdydz\int 2\pi pdp^2\delta(\frac{p^2}{2m} - U_0\frac{z}{L} - \epsilon)$$

con il cambio $y = \frac{p^2}{2m}$ e $t = U_0\frac{z}{L}$

$$G(\epsilon) = \frac{(2m)^{3/2}}{h^3}\pi R^2\frac{L}{U_0}\int_0^{U_0} dt\int_0^\infty y^{1/2}dy\delta(y - t - \epsilon)$$

$$= \frac{(2m)^{3/2}}{h^3}\pi R^2\frac{L}{U_0}\int_0^{U_0} dt\theta(t + \epsilon)(t + \epsilon)^{1/2} =$$

$$\frac{(2m)^{3/2}}{h^3}\pi R^2\frac{L}{U_0}\left\{\theta(\epsilon)\frac{2}{3}\left[(U_0 + \epsilon)^{3/2} - \epsilon^{3/2}\right] + (1 - \theta(\epsilon))\theta(\epsilon + U_0)\frac{2}{3}\left[(U_0 + \epsilon)^{3/2}\right]\right\}$$

e considerando che $\theta(\epsilon)\theta(\epsilon + U_0) = \theta(\epsilon)$ (occorre fare un disegno dell' asse delle ϵ e disegnare le due θ, una che parte da $\epsilon = 0$ e l' altra che parte da $\epsilon = -U_0$)

$$\frac{(2m)^{3/2}}{h^3}\pi R^2\frac{L}{U_0}\left\{\theta(\epsilon)\frac{2}{3}\left[(U_0 + \epsilon)^{3/2} - \epsilon^{3/2}\right] + \theta(\epsilon + U_0)\frac{2}{3}\left[(U_0 + \epsilon)^{3/2}\right] - \theta(\epsilon)\frac{2}{3}\left[(U_0 + \epsilon)^{3/2}\right]\right\}$$

Che da' alla fine

$$\frac{(2m)^{3/2}}{h^3}\pi R^2\frac{L}{U_0}\frac{2}{3}\left\{-\theta(\epsilon)\left[\epsilon^{3/2}\right] + \theta(\epsilon + U_0)\left[(U_0 + \epsilon)^{3/2}\right]\right\}$$

Compito del 08.05.2018

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche non interagenti contenute in una sfera S_{4R} con centro nell'origine degli assi e raggio $4R$. Sia la Hamiltoniana di singola particella:

$$H(p,x) = c|p|^3 + V(|q|)$$

dove indicato con $r = |q|$ e $V_0 > 0$

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \le r < R \\ V_0 & R \le r < 33^{1/3}R \\ -V_0 & 33^{1/3}R \le r \le 4R \end{cases}$$

Da qui

$$g(\epsilon) = \frac{1}{h^3}\int \frac{4\pi}{3} dp^3 \int 4\pi r^2 dr \delta(c|p|^3 + V(r) - \epsilon) =$$

$$= \frac{4\pi}{h^3}\frac{4\pi}{3c}\int dy \int r^2 dr \delta(y + V(r) - \epsilon) = \int\int r^2 dr \theta(\epsilon - V(r))$$

$$= \frac{(4\pi)^2}{3ch^3}\left[\frac{R^3}{3}\theta(\epsilon + V_0) + \frac{33R^3 - R^3}{3}\theta(\epsilon - V_0) + \frac{(4R)^3 - 33R^3}{3}\theta(\epsilon + V_0)\right]$$

$$= 32R^3\frac{(4\pi)^2}{9ch^3}\left[\theta(\epsilon + V_0) + \theta(\epsilon - V_0)\right]$$

Compito del 31.01.2018

Assumendo come $H_1(p,q)$ in 2 dimensioni per particelle indipendenti confinate in un disco di raggio R

$$H_1(\vec{p},\vec{q}) = \frac{p^2}{2m} - Aq^2$$

Calcolare $g(\epsilon)$ classica.

Il valore minore dell' energia si ha per $p = 0$ e $q = R$, pari a $\epsilon = -AR^2$. Dovremo dunque trovare che per $\epsilon < -AR^2$ non ci sono stati, cioe' una $\theta(\epsilon + AR^2)$

$$g(\epsilon) = \frac{1}{h^2}\int \pi dp^2 \int \pi dq^2 \delta(H_1(p,q) - \epsilon) = \frac{\pi^2}{h^2}2m\frac{1}{A}\int d\frac{p^2}{2m}\int Aq^2 \delta(\frac{p^2}{2m} - Aq^2 - \epsilon)$$

e cambiando variabile $t = \frac{p^2}{2m}$ e $y = Aq^2$

$$g(\epsilon) = \frac{\pi^2}{h^2}2m\frac{1}{A}\int_0^\infty dt \int_0^{AR^2} dy \delta(t - y - \epsilon)$$

L' integrale sui momenti (t) e' una $\theta(y+\epsilon)$ per cui

$$g(\epsilon) = \frac{\pi^2}{h^2} 2m \frac{1}{A} \int_0^{AR^2} dy \theta(y+\epsilon)$$

Ora, abbiamo 3 intervalli

$$-\epsilon < 0 \quad \epsilon > 0 \quad \rightarrow \quad \int_0^{AR^2} dy = AR^2 \tag{1}$$

$$0 < -\epsilon < AR^2 \quad --AR^2 < \epsilon < 0 \quad \rightarrow \quad \int_{-\epsilon}^{AR^2} dy = AR^2 + \epsilon \tag{2}$$

$$-\epsilon > AR^2 \quad \epsilon < -AR^2 \quad \rightarrow \quad 0 \tag{3}$$

L' ultima relazione di dice che $\epsilon + AR^2$ deve essere maggiore di zero affinché il risultato non sia nullo. Questo soddisfa anche il primo vincolo della seconda espressione. Il fatto che ϵ debba essere minore di zero lo possiamo scrivere come $1 - \theta(\epsilon)$

In termini di θ abbiamo

$$\theta(\epsilon + AR^2)\left([1-\theta(\epsilon)](AR^2 + A\epsilon) + \theta(\epsilon)AR^2\right) = \theta(\epsilon + AR^2)\left[(AR^2 + \epsilon) - \theta(\epsilon)A\epsilon\right]$$

Per $\epsilon > 0$ la prima θ' e' ridondante e dunque

$$g(\epsilon) = \frac{\pi^2}{h^2} 2mR^2 \qquad \epsilon > 0$$

e

$$g(\epsilon) = \frac{\pi^2}{h^2} 2m \frac{1}{A} \theta(\epsilon + AR^2)(AR^2 + \epsilon) \qquad \epsilon < 0$$

Per energie positive $g(\epsilon)$ e' costante. I possibili valori di x e p che danno una energia positiva sono sempre gli stessi in 2d.

Per un gas ideale, $H_1 = p^2/2m$ avremmo avuto

$$g(\epsilon) = \frac{1}{h^2} \int \pi dp^2 \int \pi dq^2 \delta(H_1(p,q) - \epsilon) = \frac{\pi^2}{h^2} 2m \int d\frac{p^2}{2m} \int dq^2 \delta(\frac{p^2}{2m} - \epsilon) = \frac{\pi\pi R^2}{h^2} 2m \int dy \delta(y-\epsilon) =$$

$$\frac{\pi\pi R^2}{h^2} 2m\theta(\epsilon)$$

Compito del 18.02.2014

Un sistema unidimensionale di particelle indipendenti confinate tra $-2L < x < 2L$ ha Hamiltoniana di singola particella pari a

$$H(p,x) = c|p| + V(x)$$

con ($-2L < x < -L$, $-L < x < L$, $L < x < 2L$)

$$V(x) = 0, V_0, -V_0$$

La densita' degli stati classica e'

$$g(\epsilon) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-2L}^{2L} dx \delta(H(p,x) - \epsilon) =$$

$$g(\epsilon) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-2L}^{2L} dx \delta(c|p| + V(x) - \epsilon) = \frac{2}{h}\int_{0}^{\infty} dp_x \int_{-2L}^{2L} dx \delta(cp_x + V(x) - \epsilon) =$$

indicando $y = cp_x$

$$= \frac{2}{hc}\int_{0}^{\infty} dy \int_{-2L}^{2L} dx \delta(y + V(x) - \epsilon) = \frac{2}{hc}\int_{-2L}^{2L} dx \theta(\epsilon - V(x))$$

E spezzando l' integrale nei vari pezzi

$$= \frac{2}{hc}\left\{\int_{-2L}^{-L} dx \theta(\epsilon) + \int_{-L}^{L} dx \theta(\epsilon - V_0) + \int_{L}^{2L} dx \theta(\epsilon + V_0)\right\} = \frac{2L}{hc}\left\{\theta(\epsilon) + 2\theta(\epsilon - V_0) + \theta(\epsilon + V_0)\right\}$$

Compito del 11.11.2020

Si consideri un gas perfetto costituito da N particelle ultra-relativistiche identiche non interagenti vincolate a muoversi su un piano. Fissato un sistema di riferimento con origine nel punto O, la Hamiltoniana di singola particella è data da:

$$H_1(\vec{p}, \vec{q}, m) = c|\vec{p}| + \omega(|\vec{q}|^2/a^2 - m)$$

con $m = \pm 1$

La densita' degli stati classica e' (per un generico valore di m)

$$g(\epsilon) = \frac{1}{h^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp_x dp_y \int dx dy \delta(H(p,x,m) - \epsilon) =$$

$$g(\epsilon) = \frac{1}{h^2}\int_0^\infty 2\pi p dp \int \pi dr^2 \delta(c|\vec{p}| + \omega(|\vec{q}|^2/a^2 - m) - \epsilon) =$$

con il cambio $cp = y$ e $t = \omega r^2/a^2$

$$g(\epsilon) = \frac{1}{c^2h^2}2\pi^2\frac{a^2}{\omega}\int_0^\infty ydy \int dt\delta(y + t - m\omega - \epsilon) =$$

$$= \frac{1}{c^2h^2}2\pi^2\frac{a^2}{\omega}\int_0^\infty ydy\theta(m\omega + \epsilon - y)$$

La θ ci dice che

$$m\omega + \epsilon - y > 0$$

e dunque che $y < m\omega + \epsilon$. La quantitá $m\omega + \epsilon$ puo' essere o fuori dall' intervallo di integrazione (cioé negativa) o essere dentro l' intervallo di integrazione. Siccome $y < m\omega+\epsilon$, bastera' integrare tra 0 e $m\omega + \epsilon$

$$= \frac{1}{c^2h^2}2\pi^2\frac{a^2}{\omega}\theta(m\omega + \epsilon)\int_0^{m\omega+\epsilon} ydy = \frac{1}{c^2h^2}2\pi^2\frac{a^2}{\omega}(m\omega + \epsilon)^2\frac{1}{2}\theta(m\omega + \epsilon)$$

Sommando i risultati per $m = -1$ ed $m = +1$ si trova cosi'

$$\frac{1}{c^2h^2}2\pi^2\frac{a^2}{2\omega}\left[(\epsilon + \omega)^2\theta(\epsilon + \omega) + (\epsilon - \omega)^2\theta(\epsilon - \omega)\right]$$