

1 Atomo di Idrogeno in Campi Elettrici Statici

Assumiamo di immergere un atomo di idrogeno (o un atomo idrogenoide) in un campo elettrico statico \mathcal{E} diretto lungo z . Trascurando l'interazione fine, il campo introduce una perturbazione $W = -(-e)\mathcal{E}z$. La nuova Hamiltoniana e' dunque

$$H = H_0 + e\mathcal{E}z$$

La perturbazione e' dispari e dunque non ci aspettiamo contributi al primo ordine su stati non degeneri. Iniziamo dunque a studiare il primo livello eccitato $n = 2$, che e' un livello degenero. Calcoliamo dunque la perturbazione nel sottospazio $2s, 2p_{-1}, 2p_0, 2p_1$. Gli elementi diagonali sono nulli per simmetria. L'operatore $z = r \cos \theta = r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}$. Per la simmetria lungo z (integrale in ϕ) $m = m'$. Gli unici due elementi non nulli sono indicati con X nella tabella seguente

	$2s$	$2p_0$	$2p_{-1}$	$2p_1$
$2s$	0	X	0	0
$2p_0$	X	0	0	0
$2p_{-1}$	0	0	0	0
$2p_1$	0	0	0	0

Vediamo dunque subito che gli stato $p_{\pm 1}$ non vengono mescolati dalla perturbazione e rimangono imperturbati. Lo stato s si mescola insieme con lo stato p_0 modificando la loro energia. Calcoliamo l'elemento di matrice $\langle 2s | e\mathcal{E}z | 2p_0 \rangle$, ricordando che

con

$$R_{20}(r) = 2 \left(\frac{Z}{2a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{Zr}{2a_0} \right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}}$$

e

$$R_{21}(r) = \sqrt{\frac{1}{3}} \left(\frac{Z}{2a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{Zr}{a_0} e^{-\frac{Zr}{2a_0}}$$

$$\langle 2s | e\mathcal{E}z | 2p_0 \rangle = e\mathcal{E} \int r^3 dr R_{20}(r) R_{21}(r) \int d\Omega Y_{00}^* \cos(\theta) Y_{10}.$$

Definendo $y = Z/a$ e convertendo $Y_{00} = \sqrt{1/4\pi}$, $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$ e ricordando che $\int y^n e^{-y} dy = n!$

$$\langle 2s | e\mathcal{E}z | 2p_0 \rangle = e\mathcal{E} \left(\frac{a_0}{Z}\right)^4 \sqrt{\frac{4}{3}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^3 \int y^3 dy y \left(1 - \frac{y}{2}\right) e^{-y} \int d\Omega Y_{00}^* \cos \theta Y_{10} =$$

$$e\mathcal{E} \frac{a_0}{Z} \sqrt{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left[4! - \frac{5!}{2}\right] \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta \cos^2 \theta =$$

$$e\mathcal{E} \frac{a_0}{Z} \sqrt{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left[4! - \frac{5!}{2}\right] \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{2}{3} = e\mathcal{E} \frac{a_0}{Z} \frac{1}{8} 24 \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{2}{3} = -3e\mathcal{E} \frac{a_0}{Z}$$

Quindi, riordinando la matrice, la perturbazione e'

	$2s$	$2p_0$	$2p_{-1}$	$2p_1$
$2s$	0	$-3e\mathcal{E} \frac{a_0}{Z}$	0	0
$2p_0$	$-3e\mathcal{E} \frac{a_0}{Z}$	0	0	0
$2p_{-1}$	0	0	0	0
$2p_1$	0	0	0	0

Limitandoci dunque al sottospazio $2s \ 2p_0$ occorre diagonalizzare la matrice

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -3e\mathcal{E}a_0/Z \\ -3e\mathcal{E}a_0/Z & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante e'

$$E^2 - (3e\mathcal{E}a_0/Z)^2 = 0$$

e dunque i nuovi livelli energetici sono $E = \pm 3e\mathcal{E}a_0/Z$. Le autofunzioni corrispondenti sono per l' energia positiva (soluzione +)

$$-3e\mathcal{E}a_0/Z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2s} \\ c_{2p} \end{pmatrix} = 0$$

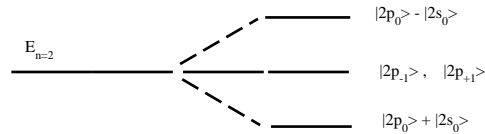
che ha come soluzione $c_{2s} = -c_{2p}$ e per l' energia negativa (soluzione -)

$$-3e\mathcal{E}a_0/Z \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2s} \\ c_{2p} \end{pmatrix} = 0$$

che ha come soluzione $c_{2s} = c_{2p}$. Le nuove funzioni d'onda sono dunque

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{2s} \pm \psi_{2p})$$

I livelli energetici dello stato $n = 2$ si modificano dunque come in figura



Alcune considerazioni:

- Affinche' il campo elettrico modifichi i livelli energetici (al primo ordine nella perturbazione), e' necessario che ci sia un momento

di dipolo elettrico con cui il campo puo' interagire. Per questo motivo, p_+ e p_- (come l' $1s$) non sono toccati. Ma il sottospazio $2s$ e $2p$ e' caratterizzato da un possibile momento di dipolo allineato lungo il campo ψ_- o in modo opposto al campo ψ_+ . Su questi stati la perturbazione ha effetto.

- In presenza di un campo elettrico, il $2s$ si mescola con il $2p$. Dunque la metastabilita' del $2s$ e' compromessa dal mescolamento. Con un tempo tipico $\hbar/W_{2s,2p}$ un sistema inizialmente nel $2s$ si trova nel $2p$, dove puo' decadere spontaneamente.

Immaginiamo che al tempo 0 il sistema sia nello stato metastabile $2s$ e che venga acceso il campo. La nuova base e' la base delle funzioni ϕ_{\pm} . Quindi al tempo 0

$$\phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_+(0) + \psi_-(0)]$$

mentre per tempi successivi

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_+(0)e^{\frac{iE_+t}{\hbar}} + \psi_-(0)e^{\frac{iE_-t}{\hbar}}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(\psi_{2s} + \psi_{2p})}{\sqrt{2}} e^{\frac{iE_+t}{\hbar}} + \frac{(\psi_{2s} - \psi_{2p})}{\sqrt{2}} e^{\frac{iE_-t}{\hbar}} \right]$$

e la probabilita' di essere sullo stato $2s$ varia nel tempo come

$$\langle \psi_{2s} | \phi(t) \rangle = \frac{1}{2} [e^{\frac{iE_+t}{\hbar}} + e^{\frac{iE_-t}{\hbar}}]$$

da cui

$$|\langle \psi_{2s} | \phi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} |1 + e^{\frac{i(E_- - E_+)t}{\hbar}}|^2 = \frac{1}{4} |1 + e^{\frac{i\Delta Et}{\hbar}}|^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{\Delta Et}{\hbar} \right]$$

quindi oscilla con una frequenza $\Delta E/\hbar$ od un periodo $\hbar\pi/\Delta E$.

Con campi dell' ordine di 10^7 V/m, il periodo e' circa 10^{-12} s, e dunque molto minore del tempo di metastabilita' e del tempo di decadimento $2p \rightarrow 1s$ che e' circa 10^{-9} s.

1.0.1 Il livello $3n$

Come prima, per la simmetria lungo z (integrale in ϕ) $m = m'$. Gli unici elementi non nulli possono coinvolgere s_0, p_0, d_0, p_+, d_+ e p_-, d_- . Gli elementi non nulli sono indicati con X nella tabella seguente

	$3s$	$3p_0$	$3d_0$	$3p_{-1}$	$3d_{-1}$	$3p_1$	$3d_1$	$3d_2$	$3d_{-2}$
$3s$	0	X_{sp_0}	X_{sd_0}	0	0	0	0	0	0
$3p_0$	X_{sp_0}	0	X_{pd_0}	0	0	0	0	0	0
$3d_0$	X_{sd_0}	X_{pd_0}	0	0	0	0	0	0	0
$3p_{-1}$	0	0	0	0	$X_{pd_{-1}}$	0	0	0	0
$3d_{-1}$	0	0	0	$X_{pd_{-1}}$	0	0	0	0	0
$3p_1$	0	0	0	0	0	0	X_{pd_1}	0	0
$3d_1$	0	0	0	0	0	X_{pd_1}	0	0	0
$3d_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$3d_{-2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Esaminiamo i vari contributi. $X_{sd_0} = 0$, poiche' coinvolge il prodotto delle seguenti 3 armoniche sferiche $Y_{00}Y_{10}Y_{20} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}Y_{10}Y_{20}$ e le ultime due sono ortogonali. Lo stesso si poteva dire guardando il prodotto delle tre armoniche in termini di coefficienti di Clebsch-Gordon. La matrice si semplifica dunque in

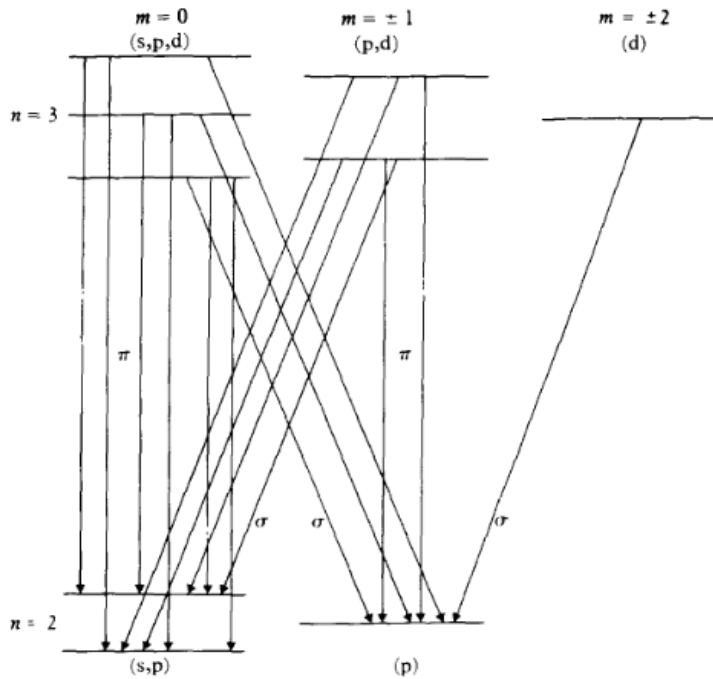
	$3s$	$3p_0$	$3d_0$	$3p_{-1}$	$3d_{-1}$	$3p_1$	$3d_1$	$3d_2$	$3d_{-2}$
$3s$	0	X_{sp_0}	0	0	0	0	0	0	0
$3p_0$	X_{sp_0}	0	X_{pd_0}	0	0	0	0	0	0
$3d_0$	0	X_{pd_0}	0	0	0	0	0	0	0
$3p_{-1}$	0	0	0	0	$X_{pd_{-1}}$	0	0	0	0
$3d_{-1}$	0	0	0	$X_{pd_{-1}}$	0	0	0	0	0
$3p_1$	0	0	0	0	0	0	X_{pd_1}	0	0
$3d_1$	0	0	0	0	0	X_{pd_1}	0	0	0
$3d_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$3d_{-2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

La matrice a blocchi puo' essere diagonalizzata a blocchi. Il primo blocco e'

$$W = \begin{pmatrix} 0 & X_{sp_0} & 0 \\ X_{sp_0} & 0 & X_{pd_0} \\ 0 & X_{pd_0} & 0 \end{pmatrix}$$

e ja come determinante secolare $\lambda[\lambda^2 - X_{pd_0}^2] - X_{sp_0}\lambda X_{sp_0}$ che ammette come soluzioni $\lambda = 0$ e $\lambda = \pm\sqrt{X_{pd_0}^2 + X_{sp_0}^2}$. Il secondo blocco ammette come soluzioni $\lambda = \pm X_{pd_{-1}}$, mentre il terzo $\lambda = \pm X_{pd_1}$. Per simmetria ci si aspetta che $X_{pd_{-1}} = X_{pd_1}$. Dunque i nove stati degeneri $n = 3$ si separano in 5 stati, uno ancora triplamente degenero con energia uguale allo stato imperturbato, 2 degeneri con degenerazione 2 ($\pm X_{pd_{-1}}$), e due non degeneri ($\pm\sqrt{X_{pd_0}^2 + X_{sp_0}^2}$).

La seguente figura riporta i possibili livelli degli stati $n=2$ e $n=3$ in presenza di campo elettrico, e le possibili transizioni. E' da notare che la regola di selezione $\Delta m = 0, \pm 1$ sopravvive, ma la regola $\Delta l = \pm 1$ non si puo' piu' applicare, poiche' gli stati perturbati non hanno l fissato (sono combinazioni lineari di diversi l).



5.14 Splitting of the $n = 3$ and $n = 2$ levels of hydrogen due to the linear Stark effect. The various possible transitions are shown, those with $\Delta m = 0$ correspond to π lines and those with $\Delta m = \pm 1$ to σ lines.

2 Effetto Stark Quadratico

Per quantificare l'effetto del campo elettrico statico sullo stato fondamentale occorre utilizzare la teoria delle perturbazioni al secondo ordine. La energia perturbata al secondo ordine $E_{100}^{(2)}$ e' scrivibile come

$$E_{100}^{(2)} = e^2 \mathcal{E}^2 \sum_{n>1, l, m} \frac{|\langle nlm|z|100 \rangle|^2}{E_1 - E_n}$$

L'elemento di matrice $\langle nlm|z|100 \rangle = \langle nlm|r \cos \theta|100 \rangle = \langle nlm|r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}|100 \rangle$, quindi la sommatoria si limitera' a tutti gli stati con $l=1$, piu' gli stati del continuo.

$$E_{100}^{(2)} = e^2 \mathcal{E}^2 \sum_{n>1} \sum_{m=-1}^1 \frac{|\langle n1m|z|100 \rangle|^2}{E_1 - E_n}$$

Questo calcolo, sebbene fattibile in coordinate paraboliche, e' oltre le nostre aspettative. Comunque possiamo avere una stima della stabilizzazione indotta dalla perturbazione (il denominatore e' negativo sempre, quindi la perturbazione diminuisce l'energia) maggiorando il denominatore

$$E_{100}^{(2)} = e^2 \mathcal{E}^2 \sum_{n>1,l,m} \frac{|\langle nlm|z|100 \rangle|^2}{E_1 - E_n} > e^2 \mathcal{E}^2 \frac{1}{E_1 - E_2} \sum_{n>1,l,m} |\langle nlm|z|100 \rangle|^2$$

Ricordando che $\langle 100|z|100 \rangle = 0$ e la completezza dello spazio $\sum_{nlm} |nlm \rangle \langle nlm| = 1$ troviamo

$$\begin{aligned} E_{100}^{(2)} &> -e^2 \mathcal{E}^2 \frac{1}{E_2 - E_1} \sum_{n,l,m} \langle 100|z|nlm \rangle \langle nlm|z|100 \rangle \\ &= -e^2 \mathcal{E}^2 \frac{1}{E_2 - E_1} \langle 100|z^2|100 \rangle \\ E_{100}^{(2)} &> -e^2 \mathcal{E}^2 \frac{1}{E_2 - E_1} \frac{\langle 100|r^2|100 \rangle}{3} \end{aligned}$$

Ricordando che

$$R_{10}(r) = 2 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a_0}}$$

$$\langle r^2 \rangle = 4 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^3 \int_0^\infty r^2 dr r^2 e^{-\frac{2Zr}{a_0}} \int \frac{1}{4\pi} d\Omega = 4 \left(\frac{a_0}{2Z} \right)^5 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^3 \int y^4 dy e^{-y} = 4 \cdot 4! \left(\frac{1}{2} \right)^5$$

cosi' che

$$0 > E_{100}^{(2)} > -e^2 \mathcal{E}^2 \frac{1}{E_2 - E_1} \frac{3a_0^2}{Z^2}$$

Dal calcolo esatto, si vede che circa un terzo della correzione energetica nasce da accoppiamenti con stati del continuo.

La correzione energetica e' interpretabile come interazione tra il campo esterno ed il dipolo indotto $\alpha \mathcal{E}$. La polarizzabilita' α e' definita come

$$\alpha = -\frac{1}{\mathcal{E}} \frac{\partial E_{100}^{(2)}}{\partial \mathcal{E}} = 2e^2 \sum_{n>1,l,m} \frac{|\langle nlm|z|100 \rangle|^2}{E_n - E_1}$$

3 Ionizzazione

4 Campi statici magnetici

Abbiamo visto che l' Hamiltoniana nel caso di un campo EM si scrive come

$$H = H_0 + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2 - i \frac{e\hbar}{m} (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})$$

Per modellizzare un campo magnetico statico,

$$\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{B}} \times \vec{r})$$

,

con \mathcal{B} indipendente dal tempo e dallo spazio.

4.0.2 Dimostrazione $\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{B}} \times \vec{r}) \rightarrow \vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}}_0$

Il vettore \vec{A} ha componenti

$$\vec{A} = \frac{B_{0y}z - B_{0z}y}{2} \hat{x} + \frac{B_{0z}x - B_{0x}z}{2} \hat{y} + \frac{B_{0x}y - B_{0y}x}{2} \hat{z}$$

Il campo magnetico associato e' $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, cioe'

$$\vec{B} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} =$$

$$\frac{B_{0x} + B_{0x}}{2} \hat{x} - \frac{-B_{0y} - B_{0y}}{2} \hat{y} + \frac{B_{0z} + B_{0z}}{2} \hat{z}$$

Quindi, se \vec{A} e' costante, anche $\vec{B} = \vec{B}_0$ e' costante.

4.1 L' Hamiltoniana

$$H = H_0 + \frac{e^2}{2m} \left[\frac{1}{2} (\vec{\mathcal{B}} \times \vec{r}) \right]^2 - i \frac{e\hbar}{m} \left(\frac{1}{2} (\vec{\mathcal{B}} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \right)$$

Iniziamo esaminando il termine $-i \frac{e\hbar}{m} \left(\frac{1}{2} (\vec{\mathcal{B}} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \right)$. Ricordando che $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ e che

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

il termine diviene

$$\frac{e}{2m} \vec{\mathcal{B}} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{e}{2m} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{L}$$

Al momento angolare possiamo associare un momento magnetico $\vec{\mathcal{M}}_L$ attraverso la relazione

$$\vec{\mathcal{M}}_L = -\frac{e}{2m} \vec{L} = -\mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar}$$

dove $\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m}$ e' chiamato magnetone di Bohr. Il contributo all' Hamiltoniana diviene dunque

$$H_L = -\vec{\mathcal{M}}_L \cdot \vec{\mathcal{B}}$$

Il momento angolare di spin contribuisce anche esso ad un accoppiamento con il campo magnetico, con un termine analogo a quello del momento angolare.

$$H_S = -\vec{\mathcal{M}}_S \cdot \vec{\mathcal{B}}$$

con

$$\vec{\mathcal{M}}_S = -g_S \frac{e}{2m} \vec{S} = -g_S \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}$$

dove g_S prende il nome di rapporto giromagnetico ed e' due per l'elettrone (valore calcolabile dalla teoria di Dirac)

Considerando anche il termine di spin, l' Hamiltoniana e' dunque

$$H = H_0 + \frac{e^2}{8m} [(\vec{\mathcal{B}} \times \vec{r})]^2 + \frac{\mu_B}{\hbar} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{\mathcal{B}}$$

I due termini prendono il nome di contributo diamagnetico e contributo paramagnetico. Con i campi tipici di laboratorio, al massimo qualche decina di Tesla (1 Tesla = 10 kG, 1 Gauss \approx il valore del campo magnetico terrestre), il termine diamagnetico e' trascurabile. Diversa potrebbe essere la situazione in astrofisica dove campi molto piu' intensi sono possibile.

4.2 Campi magnetici intensi (rispetto a spin-orbita)

Iniziamo con il guardare il caso di campi forti (o campi arbitrari nel caso in cui $L = 0$ e il termine spin-orbita e' nullo). In questo caso H_0 include solo il termine cinetico e potenziale e la perturbazione e' solo paramagnetica. Indicando con z la direzione del campo magnetico statico

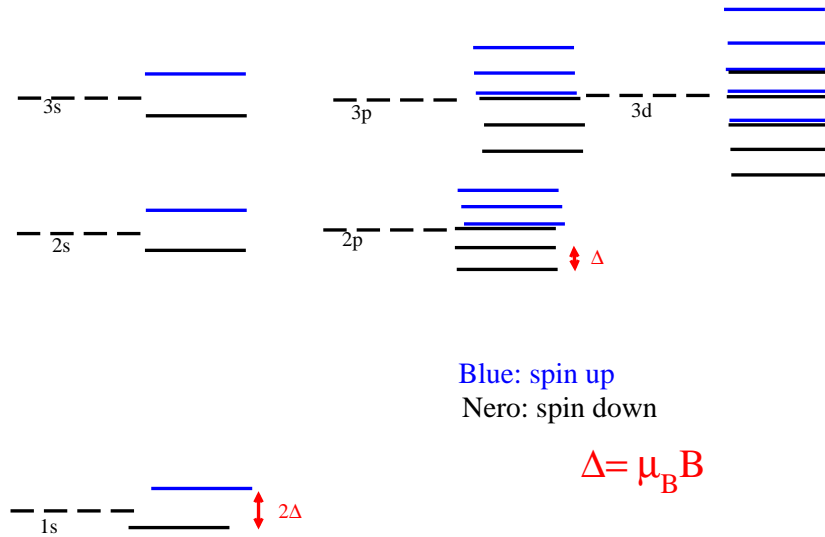
$$H = H_0 + \frac{\mu_B}{\hbar} (L_z + 2S_z) \mathcal{B}$$

In questo caso i nuovi autovalori dell' energia sono calcolabili direttamente, essendo la perturbazione diagonale nella base originale. I

nuovi livelli energetici sono

$$E_{n,l,m_l,m_s} = E_n + \mu_B \mathcal{B}(m_l + 2m_s)$$

con $-l < m_l < l$ e $m_s = \pm 1/2$. All' interno dello stesso n , i livelli energetici sono equispaziati di $\frac{\mu_B}{\hbar} \mathcal{B}$. La figura seguente mostra l'effetto di un campo magnetico forte sui primi livelli dell' atomo di idrogeno



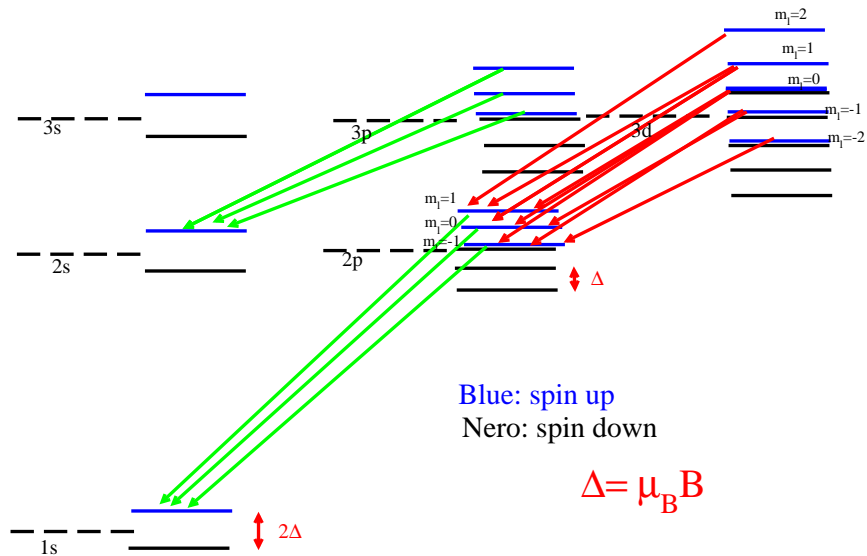
Nota che per passare da un livello al successivo, m_l deve cambiare di ± 1 , se m_s non cambia. Se invece m_l non cambia ma cambia m_s , $\Delta 2m_s = \pm 2$. Da qui la spaziatura tra i livelli vicini e' $\mu_B \mathcal{B}$ per gli stati p e d e $2\mu_B \mathcal{B}$ per gli stati s .

4.3 Transizioni di dipolo in presenza di campo forte

Le transizioni di dipolo richiedono $\Delta l = \pm 1$, $\Delta m_l = 0, \pm 1$, e $\Delta m_s = 0$. Questa ultima condizione rende immediatamente chiaro che

$$\Delta E = E_{n,l,m_l,m_s} - E_{n',l',m'_l,m'_s} = E_n - E_{n'} + \mu_B \mathcal{B}(m_l - m'_l)$$

e poiché $\Delta m_l = 0, \pm 1$, osserveremo SEMPRE tre righe spettrali. La riga con $\Delta m = 0$ prende il nome di riga π e le altre due ($\Delta m = \pm 1$) righe σ . Nella figura che segue sono indicate alcune transizioni possibili tra stati tutti con spin up.



5 L' interazione spin-orbita come perturbazione apprezzabile ma piccola: Paschen-Back

Quando il campo e' intenso rispetto a spin-orbita, quest'ultima puo' essere considerata una perturbazione. Abbiamo visto che l'energia degli stati dipende da $m_l + 2m_s$. Gli stati degeneri sono dunque quelli che hanno $m_s = 1/2, m_l$ e $m_s = -1/2, m_l + 2$, quindi stati che differiscono in m_l di due. La perturbazione $\vec{L} \cdot \vec{S}$ ha elementi di matrice nulla tra questi stati. Infatti

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = L_+ S_- + L_0 S_0 + L_- S_+$$

e bisogna calcolare

$$\langle n, l, m_l, m_s | \vec{L} \cdot \vec{S} | n, l, m_l \pm 2, -m_s \rangle$$

e poiche' L_+ e L_- variano m_l solo di ± 1 , gli elementi di matrice tra gli stati degeneri sono tutti nulli. Possiamo quindi valutare l'effetto della perturbazione come se agisse su livelli non-degeneri.

Dobbiamo dunque calcolare

$$\langle n, l, m_l, m_s | \vec{L} \cdot \vec{S} | n, l, m_l, m_s \rangle = \langle n, l, m_l, m_s | L_0 S_0 | n, l, m_l, m_s \rangle$$

poiche' $L_0 S_0$ e' l'unico contributo non nullo. Scrivendo l'intera perturbazione

$$\langle n l m_l m_s | \xi(r) \vec{L} \cdot \vec{S} | n l m_l m_s \rangle = \langle n l m_l m_s | \xi(r) L_0 S_0 | n l m_l m_s \rangle = \hbar^2 m_l m_s \langle \xi(r) \rangle_{n,l}$$

e

$$\langle \xi(r) \rangle_{n,l} = \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0} \langle \frac{1}{r^3} \rangle_{n,l} = \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{Z^3}{a_0^3 n^3 l(l+1/2)(l+1)}$$

La differenza tra due livelli energetici con lo stesso valore di m_s (perche' nelle transizioni $\Delta m_s = 0$) e' ora dipendente anche da l e l'

$$E_n - E'_n + \mu_B \mathcal{B} (m_l - m_{l'}) + (\langle \xi(r) \rangle_{n,l} m_l - \langle \xi(r) \rangle_{n',l'} m_{l'}) m_s$$

6 Campi deboli rispetto a spin-orbita: Zeeman anomalo

Ora siamo nella situazione in cui lo spin-orbita e' piu' intenso del campo magnetico. L' Hamiltoniana imperturbata va dunque considerata come

$$H = H_0 + \xi(r) \vec{L} \cdot \vec{S}$$

e la perturbazione

$$H_P = \frac{\mu_B}{\hbar}(L_z + 2S_z)\mathcal{B}$$

Lavorando nella base $|n, L, S, J, m_J \rangle$, possiamo scrivere

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{J^2 - L^2 - S^2}{2}$$

e scrivere le energie dei livelli imperturbati come

$$E(n, l, s, j, m_j) = E_{nl} + \langle \xi(r) \rangle_{n,l} \hbar^2 \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2}$$

La perturbazione puo' essere scritta come

$$H_P = \frac{\mu_B}{\hbar}(J_z + S_z)\mathcal{B}$$

per cui la variazione di energia dei livelli ΔE sara' pari a

$$\Delta E = \mu_B \mathcal{B} m_j + \frac{\mu_B}{\hbar} \langle n, L, S, J, m_J | S_z | n, L, S, J, m_J \rangle$$

Nel caso dell' atomo di idrogeno, $S = 1/2$ e dunque i possibili valori di $J = L+1/2$ e $L-1/2$ ($|L-S| < J < L+S$). Utilizzando i coefficienti di Clebsh-Gordon abbiamo

$$|\Psi \rangle = |l + \frac{1}{2}, l, \frac{1}{2}, m_j \rangle = \left(\frac{l + m_j + \frac{1}{2}}{2l + 1} \right)^{0.5} Y_{l, m_j - \frac{1}{2}} \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \rangle + \left(\frac{l - m_j + \frac{1}{2}}{2l + 1} \right)^{0.5} Y_{l, m_j + \frac{1}{2}} \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \rangle \equiv |A \rangle + |B \rangle$$

e

$$\langle \Psi | S_z | \Psi \rangle = (\langle A | + \langle B |) S_z (|A \rangle + |B \rangle) = \langle A | S_z | A \rangle + \langle B | S_z | B \rangle =$$

$$\frac{\hbar}{2} \left(\frac{l + m_j + \frac{1}{2}}{2l + 1} \right) - \frac{\hbar}{2} \left(\frac{l - m_j + \frac{1}{2}}{2l + 1} \right) = \hbar \frac{m_j}{2l + 1}$$

ed analogamente per $|\Psi \rangle = |l - \frac{1}{2}, l, \frac{1}{2}, m_j \rangle$,

$$|\Psi\rangle = |l - \frac{1}{2}, l, \frac{1}{2}, m_j\rangle = -\left(\frac{l - m_j + \frac{1}{2}}{2l + 1}\right) Y_{l, m_j - \frac{1}{2}} \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \rangle +$$

$$\left(\frac{l + m_j + \frac{1}{2}}{2l + 1}\right) Y_{l, m_j + \frac{1}{2}} \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \rangle$$

si trova

$$\langle \Psi | S_z | \Psi \rangle = -\hbar \frac{m_j}{2l + 1}$$

per cui la variazione dell' energia del livello indotta dal campo magnetico e'

$$\Delta E_{j \pm 1/2} = \mu_B \mathcal{B} \left[m_j \pm \frac{m_j}{2l + 1} \right] = \mu_B \mathcal{B} m_j \frac{2l + 1 \pm 1}{2l + 1}$$

6.0.1 Calcolo attraverso il teorema di Wigner-Eckart

Il teorema di Wigner-Eckart dice che all' interno di un sottospazio di J , il valore medio di un qualsiasi operatore vettoriale (S nel nostro caso) e' calcolabile come valore medio della proiezione di S su J , diviso per la norma di J . In altre parole

$$\langle j, l, s, m_j | S | j, l, s, m_j \rangle = \frac{\langle j, l, s, m_j | (S \cdot J) J | j, l, s, m_j \rangle}{\langle j, l, s, m_j | J^2 | j, l, s, m_j \rangle}$$

ora possiamo utilizzare la relazione $L^2 = (J - S)^2 = J^2 + S^2 - 2J \cdot S$ e trovare

$$J \cdot S = \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2}$$

cosi' che

$$\langle j, l, s, m_j | S_z | j, l, s, m_j \rangle = m_j \hbar \frac{j(j + 1) + s(s + 1) - l(l + 1)}{2j(j + 1)}$$

Nel caso $j = l + 1/2$,

$$\begin{aligned} \langle j, l, s, m_j | S_z | j, l, s, m_j \rangle &= m_j \hbar \frac{(l + 1/2)(l + 3/2) + 3/4 - l(l + 1)}{2(l + 1/2)(l + 3/2)} = \\ &= m_j \hbar \frac{(l^2 + 3/2l + l/2 + 3/4) + 3/4 - l^2 - l}{(2l + 1)(l + 3/2)} = \frac{m_j \hbar}{2l + 1} \end{aligned}$$

mentre nel caso $j = l - 1/2$

$$\begin{aligned} \langle j, l, s, m_j | S_z | j, l, s, m_j \rangle &= m_j \hbar \frac{(l - 1/2)(l + 1/2) + 3/4 - l(l + 1)}{2(l - 1/2)(l + 1/2)} = \\ &= m_j \hbar \frac{(l^2 + l/2 - l/2 - 1/4) + 3/4 - l^2 - l}{(l - 1/2)(2l + 1)} = -\frac{m_j \hbar}{2l + 1} \end{aligned}$$

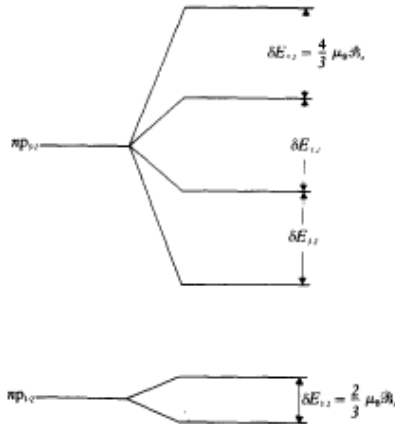
In preparazione agli atomi a molti elettroni, possiamo anche scrivere, senza sostituire $j = l \pm 1/2$

$$\Delta E_j = \mu_B \mathcal{B} m_j \left(1 + \frac{j(j + 1) + s(s + 1) - l(l + 1)}{2j(j + 1)} \right) = \mu_B \mathcal{B} g m_j$$

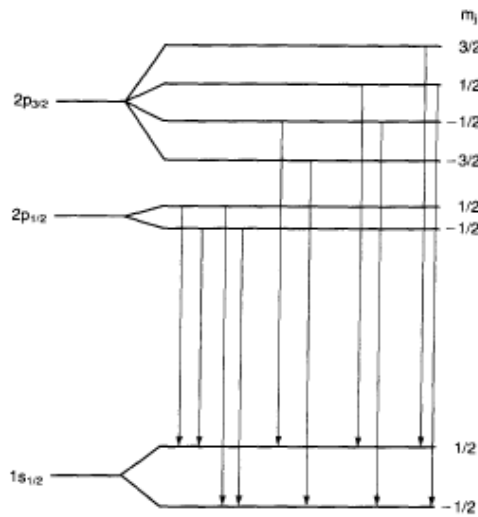
dove $g \equiv \left(1 + \frac{j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)} \right)$ e' chiamato fattore di Lande'.

La figura seguente mostra lo splitting dei livelli in rappresentazione $|nlsjm_j \rangle$. La correzione e' proporzionale a m_j (cioe' $2j+1$ livelli distinti - $2l$ o $2l+2$)

Nelle transizioni di dipolo da $2p$ a $1s$, il livello $1sJ_{1/2}$ ha due stati, il livello $2pJ_{1/2}$ ha due stati ed il livello $2pJ_{3/2}$ ha 4 stati. Con la regola di selezione $\Delta m_j = 0, \pm 1$ (che nasce sempre dal fatto che $\Delta m_s = 0$) avremo 6 righe nel passaggio $2pJ_{3/2} \rightarrow 1sJ_{1/2}$ e 4 nel passaggio $2pJ_{1/2} \rightarrow 1sJ_{1/2}$.



5.10 Splitting of $np_{3/2}$ and $np_{1/2}$ levels of atomic hydrogen in a weak magnetic field.



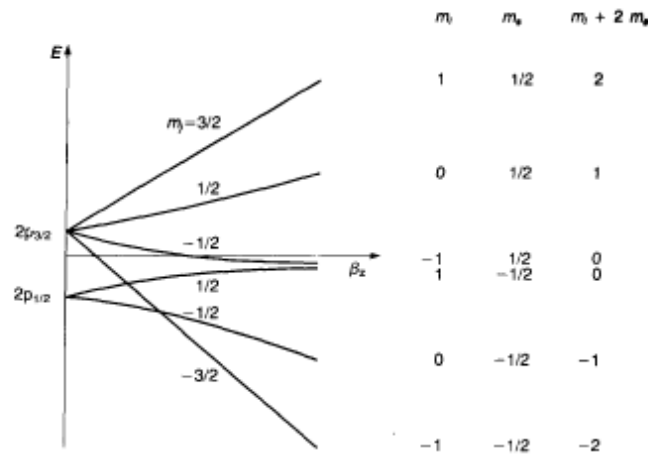
5.11 In electric dipole transitions between the $n = 2$ and $n = 1$ levels of hydrogen, in a weak magnetic field, four lines result from the $2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ transitions and six lines from the $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ transitions.

Delle 10 righe, quattro hanno $\Delta m = 0$, due hanno $\Delta m = 1$ e quattro hanno $\Delta m = -1$. Se osserviamo la luce emessa in direzione z (osservazione parallela al campo) avremo che $\mathbf{k} \sim \hat{z}$ e dunque sia \vec{e}_1 che \vec{e}_2 giacciono nel piano x, y . Quindi la componente z di \vec{e} e' nulla e dunque l' elemento di matrice associato a $\Delta m = 0$ sara' nullo. Si osserveranno dunque solo 6 righe, polarizzate circolarmente (visto che la direzione x e' del tutto equivalente alla direzione y). Se osserviamo

la luce emessa in direzione ortogonale a z (osservazione perpendicolare al campo), $\vec{e}_1 = (0, 0, -1)$ e $\vec{e}_2 = (-\sin(\Phi), \cos(\Phi), 0)$. Dunque osserveremo luce polarizzata lungo la direzione del campo magnetico proveniente da \vec{e}_1 , associata alle 4 transizioni con $\Delta m = 0$ e luce polarizzata perpendicolarmente al campo magnetico proveniente dalle 6 transizioni con $\Delta m = \pm 1$.

6.0.2 Transizione al variare di B

E' pure interessante vedere come avviene il passaggio da campi deboli a campi forti. Per lo stato $2p$, a bassi campi abbiamo i due livelli determinati da spin-orbita ($j=1+1/2$) e ($j=1-1/2$), rispettivamente di degenerazione 4 e 2. Per grandi campi abbiamo 5 livelli equispaziati secondo il valore di $m_l + 2m_s$. E' facile vedere che i due livelli con massimo $|m_j|$ (cioe' quello con $m_j = 3/2$ e $m_j = -3/2$) essendo composti da $m_l = 1, m_s = 1/2$ e $m_l = -1, m_s = -1/2$ daranno il primo e l'ultimo livello di campi forti. Gli altri possono essere tracciati con continuita' (poiche' m_j si conserva) come in figura



5.12 The energy of the levels of a hydrogen atom in a magnetic field are a smooth function of β_z . For small β_z , the splitting is uneven (the anomalous Zeeman effect), but for large β_z , the splitting is even and only three lines are seen (Paschen-Back effect). A schematic diagram is shown for the $2p$ levels.

6.0.3 Teorema di Wigner-Eckart

Il teorema di Wigner-Eckart stabilisce che all' interno di uno spazio vettoriale con \mathbf{J} fissato, qualsiasi operatore vettoriale e' proporzionale a \mathbf{J} .

Un operatore vettoriale \mathbf{V} e' un operatore che commuta con \mathbf{J} secondo le seguenti regole

$$\begin{aligned} [J_x, V_x] &= 0 \\ [J_x, V_y] &= i\hbar V_z \\ [J_x, V_z] &= -i\hbar V_y \end{aligned}$$

e le loro permutazioni cicliche. Da queste relazioni si mostra facilmente che

$$\begin{aligned} [J_x, V_{\pm}] &= \mp\hbar V_z \\ [J_y, V_{\pm}] &= -\hbar V_z \\ [J_z, V_{\pm}] &= \pm\hbar V_z \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [J_+, V_+] &= 0 \\ [J_+, V_-] &= 2\hbar V_z \\ [J_-, V_+] &= -2\hbar V_z \\ [J_-, V_-] &= 0 \end{aligned}$$

Iniziamo mostrando che gli elementi di matrice di V_{\pm} sono nulli a meno che $m - m' = \pm 1$.

$$J_z V_{\pm} |k', j', m' \rangle = ([J_z, V_{\pm}] + V_{\pm} J_z) |k', j', m' \rangle = (\pm\hbar V_{\pm} + V_{\pm} J_z) |k', j', m' \rangle =$$

$$(\pm\hbar V_{\pm} + m' \hbar V_{\pm}) |k', j', m' \rangle = (\pm\hbar V_{\pm} + m' \hbar V_{\pm}) |k', j', m' \rangle = \hbar(m' \pm 1) V_{\pm} |k', j', m' \rangle$$

da cui si conclude che $V_{\pm}|k', j', m' \rangle$ e' un autovalore di J con autovalore $m' \pm 1$ (ma non sappiamo di quale k e quale J).

Sfruttiamo il fatto che $[J_+, V_+] = 0$ tra due stati differenti in m di due

$$\langle k, j, m + 2 | J_+ V_+ | k, j, m \rangle = \langle k, j, m + 2 | V_+ J_+ | k, j, m \rangle$$

se inseriamo la chiusura

$$\sum_{k', j', m'} |k', j', m' \rangle \langle k', m', j'|$$

$$\langle k, j, m + 2 | J_+ \sum_{k', j', m'} |k', j', m' \rangle \langle k', m', j'| V_+ | k, j, m \rangle =$$

$$\langle k, j, m + 2 | V_+ \sum_{k', j', m'} |k', j', m' \rangle \langle k', m', j'| J_+ | k, j, m \rangle$$

e poiche' $\langle k, j, m | J_+ | k', j', m' \rangle = \delta_{k, k'} \delta_{j, j'} \delta_{m, m'+1}$ la sommatoria scompare e

$$\langle k, j, m + 2 | J_+ | k, j, m + 1 \rangle \langle k, j, m + 1 | V_+ | k, j, m \rangle =$$

$$\langle k, j, m + 2 | V_+ | k, j, m + 1 \rangle \langle k, j, m + 1 | J_+ | k, j, m \rangle$$

da cui il rapporto

$$\frac{\langle k, j, m + 2 | J_+ | k, j, m + 1 \rangle}{\langle k, j, m + 2 | V_+ | k, j, m + 1 \rangle} = \frac{\langle k, j, m + 1 | J_+ | k, j, m \rangle}{\langle k, j, m + 1 | V_+ | k, j, m \rangle}$$

Questa relazione vale per tutti gli m e dunque possiamo concludere che

$$\langle k, j, m+1 | V_+ | k, j, m \rangle = \alpha_+(k, j) \langle k, j, m+1 | J_+ | k, j, m \rangle$$

e poiche' abbiamo visto che gli elementi sono nulli se $m' \neq m \pm 1$, possiamo anche generalizzare questa relazione a

$$\langle k, j, m | V_+ | k, j, m' \rangle = \alpha_+(k, j) \langle k, j, m | J_+ | k, j, m' \rangle$$

In modo del tutto analogo si mostra che gli elementi di matrice di V_- , all'interno del sottospazio (k, j) , sono proporzionali a quelli di J_- ,

$$\langle k, j, m | V_- | k, j, m' \rangle = \alpha_-(k, j) \langle k, j, m | J_- | k, j, m' \rangle$$

Resta da dimostrare che lo stesso vale per V_z . Utilizzando la relazione $[J_-, V_+] = -2\hbar V_z$, e ricordando che l'aggiunto di J_- e' J_+

$$\begin{aligned} -2\hbar \langle k, j, m | V_z | k, j, m \rangle &= \langle k, j, m | J_- V_+ - V_+ J_- | k, j, m \rangle = \\ &\hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \langle k, j, m+1 | V_+ | k, j, m \rangle - \\ &\hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \langle k, j, m | V_+ | k, j, m-1 \rangle \end{aligned}$$

Da qui

$$\begin{aligned} \langle k, j, m | V_z | k, j, m \rangle &= -\frac{1}{2} \alpha_+(k, j) \\ &\{ \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \langle k, j, m+1 | J_+ | k, j, m \rangle - \\ &\sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \langle k, j, m | J_+ | k, j, m-1 \rangle \} = \\ -\frac{\hbar}{2} \alpha_+(k, j) \{ j(j+1) - m(m+1) - j(j+1) + m(m-1) \} &= m\hbar \alpha_+(k, j) \end{aligned}$$

Un calcolo analogo, basato su $[J_+, V_-] = 2\hbar V_z$ porta a

$$\langle k, j, m | V_z | k, j, m \rangle = m\hbar \alpha_-(k, j)$$

per cui $\alpha_+(k, j) = \alpha_-(k, j)$. Chiameremo questo valore $\alpha(k, j)$.
Le relazioni che abbiamo trovato mostrano anche che

$$\langle k, j, m | V_z | k, j, m' \rangle = \alpha(k, j) \langle k, j, m | J_z | k, j, m' \rangle$$

per cui, qualsiasi operatore vettoriale, nel sottospazio (k, j) e' proporzionale a \mathbf{J}

$$\langle k, j, m | \mathbf{V} | k, j, m' \rangle = \alpha(k, j) \langle k, j, m | \mathbf{J} | k, j, m' \rangle$$

Per calcolare la costante di proporzionalita' consideriamo l' operatore $\mathbf{J} \cdot \mathbf{V}$ all'interno del sottospazio (k, j) , dove $\mathbf{V} = \alpha(k, j)\mathbf{J}$

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{V} = \alpha(k, j)\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$$

per cui, su una qualsiasi autofunzione del sottospazio

$$\mathbf{V} = \frac{\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} \rangle_{k,j}}{\langle \mathbf{J}^2 \rangle_{k,j}} \mathbf{J}$$

L'intepretazione classica che possiamo fornire e' quella di dire che qualsiasi operatore vettoriale ruota intorno a \mathbf{J} e mediando nel tempo si conserva solo la componente lungo \mathbf{J}

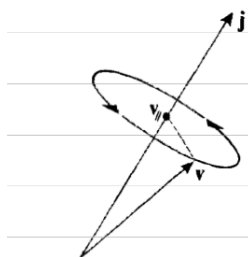


FIGURE 1

Classical interpretation of the projection theorem : since the vector \mathbf{v} rotates very rapidly about the total angular momentum \mathbf{j} , only its static component \mathbf{v}_{\parallel} should be taken into account.

6.1 Polarizzazione della luce emessa

Il campo magnetico separa i livelli degeneri in m_l e m_s e fa' si che varie transizioni possano avvenire con diverse frequenze. Inoltre, la

presenza del campo magnetico rompe la simmetria del sistema e dà vita ad una direzione privilegiata, la direzione del campo. Diventa quindi interessante studiare le proprietà della radiazione osservata nelle varie direzioni. Studiamo quindi come descrivere la dipendenza dall'angolo di osservazione. Focalizziamoci sulla luce emessa. La probabilità di osservare un processo di emissione spontanea nell'angolo solido $d\Omega$ è

$$W_{ba}^{emissionespontanea} d\Omega = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} |\hat{\epsilon} \cdot \vec{r}_{ba}|^2 d\Omega \equiv C(\omega) |\hat{\epsilon} \cdot \vec{r}_{ba}|^2 d\Omega$$

Supponiamo di voler calcolare la probabilità di transizione di un fotone emesso in direzione $\hat{k} = (k_x, k_y, k_z)$ e polarizzazione $\hat{\epsilon}$. Sicuramente $\hat{k} \cdot \hat{\epsilon} = 0$. Espandiamo $\hat{\epsilon}$ in una base $\hat{\epsilon}_1$ e $\hat{\epsilon}_2$ scelta con le seguenti regole

- $\hat{\epsilon}_2$ giace nel piano x, y (sempre possibile scegliere un vettore perpendicolare a \hat{k} che giace nel piano).
- $\hat{\epsilon}_1$ deve essere perpendicolare a $\hat{\epsilon}_2$ e a \hat{k} e deve formare con essi una terna destrorsa $\hat{\epsilon}_1 \times \hat{\epsilon}_2 = \hat{k}$

Poiché $\hat{k} \cdot \hat{\epsilon}_2 = 0$, $k_x \epsilon_{2x} + k_y \epsilon_{2y} = 0$. Chiamando Θ e Φ gli angoli polari di \hat{k} , $\sin \Theta \cos \Phi \epsilon_{2x} + \sin \Theta \sin \Phi \epsilon_{2y} = 0$. La soluzione è dunque

$$\hat{\epsilon}_2 = (-\sin \Phi, \cos \Phi, 0)$$

Per trovare $\hat{\epsilon}_1$ usiamo la relazione $\hat{\epsilon}_1 = \hat{\epsilon}_2 \times \hat{k}$, che fa sì che $\hat{\epsilon}_1 \times \hat{\epsilon}_2 = \hat{k}$, come richiesto.

Troviamo così

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_1 &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ \sin \Theta \cos \Phi & \sin \Theta \sin \Phi & \cos \Theta \end{pmatrix} \\ &= (\cos \Theta \cos \Phi, \cos \Theta \sin \Phi, -\sin \Theta (\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi)) \end{aligned}$$

Nel caso in cui \hat{k} e' diretto lungo l'asse z (direzione del campo magnetico)

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= (\cos \Phi, \sin \Phi, 0) \\ \hat{e}_2 &= (-\sin \Phi, \cos \Phi, 0)\end{aligned}$$

(nessuno dei due ha una componente lungo z , riga π mancante. Le componenti residue nel piano xy sono speculari, riga σ^+ e σ^- presenti, circolarmente polarizzate).

Nel caso in cui \hat{k} e' nel piano xy (direzione perpendicolare al campo magnetico)

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= (0, 0, -1) \\ \hat{e}_2 &= (-\sin \Phi, \cos \Phi, 0)\end{aligned}$$

e quindi \hat{e}_1 contribuirà solo a $\Delta m = 0$. Inoltre nella direzione 1 non c'e' segnale σ^+ o σ^- e dunque la luce e' polarizzata nel piano.

Ora consideriamo in piu' dettaglio i due casi limite: osserviamo la luce con \vec{k} lungo z (osservazione longitudinale) e con \vec{k} perpendicolare a z (osservazione trasversa). Nel primo caso, $\Theta = 0$, nel secondo $\Theta = \pi/2$.

6.1.1 σ^- (la riga con $\Delta m = +1$)

Iniziamo con il guardare la riga con $\Delta m = +1$ chiamata riga σ^- . Se ci ricordiamo che $\vec{\epsilon} \cdot \mathbf{r}$ si puo' scrivere come $\sum_q \epsilon_q^* r_q$ e che $r_q \sim Y_1^q$, e ricordando che la l'integrazione su ϕ introduce un regola di selezione legata a $-m_f + q + m_i = 0$, vediamo subito che questa riga e' presente quanto $\epsilon_{1+}^* r_+$ oppure $\epsilon_{2+}^* r_+$ (o entrambi) sono diversi da zero. Poiche' $\epsilon_{1+}^* = \epsilon_{1-}$, dobbiamo valutare gli elementi di matrice associati a $\epsilon_{1-} r_+$ e $\epsilon_{2-} r_+$

$$\begin{aligned}\epsilon_{1-r_+} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{1x} - i\epsilon_{1y})(x_{ba} + iy_{ba}) = \frac{1}{2}(\cos \Theta \cos \Phi - i \cos \Theta \sin \Phi)(x_{ba} + iy_{ba}) = \\ & \frac{1}{2} \cos \Theta e^{-i\Phi}(x_{ba} + iy_{ba})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{2-r_+} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{2x} - i\epsilon_{2y})(x_{ba} + iy_{ba}) = \frac{1}{2}(-\sin \Phi - i \cos \Phi)(x_{ba} + iy_{ba}) = \\ & -\frac{1}{2}ie^{-i\Phi}(x_{ba} + iy_{ba})\end{aligned}$$

Sommando i moduli quadri dei due contributi

$$\sum_{1,2} W_{ba}^{emissionespontanea} \sigma^- d\Omega = C(\omega) \left\{ \frac{1}{4} \cos^2 \Theta |(x_{ba} + iy_{ba})|^2 + \frac{1}{4} |(x_{ba} + iy_{ba})|^2 \right\} d\Omega$$

Dalle espressioni trovate si vede che per $\cos \Theta = 0$ (\vec{k} nel piano xy) $\epsilon_{1-r_+} = 0$ e dunque solo la direzione 2 contribuirà alla luce polarizzata in σ_- . Per $\cos \Theta = 1$ (\vec{k} lungo z, la direzione del campo magnetico) sia le direzioni 1 e 2 daranno vita a luce polarizzata

6.1.2 σ_+ (la riga con $\Delta m = -1$)

Si trova lo stesso risultato anche per σ_+ ,

$$\sum_{1,2} W_{ba}^{emissionespontanea} \sigma^- d\Omega = C(\omega) \left\{ \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \Theta) |(x_{ba} - iy_{ba})|^2 \right\} d\Omega$$

6.1.3 Riga π

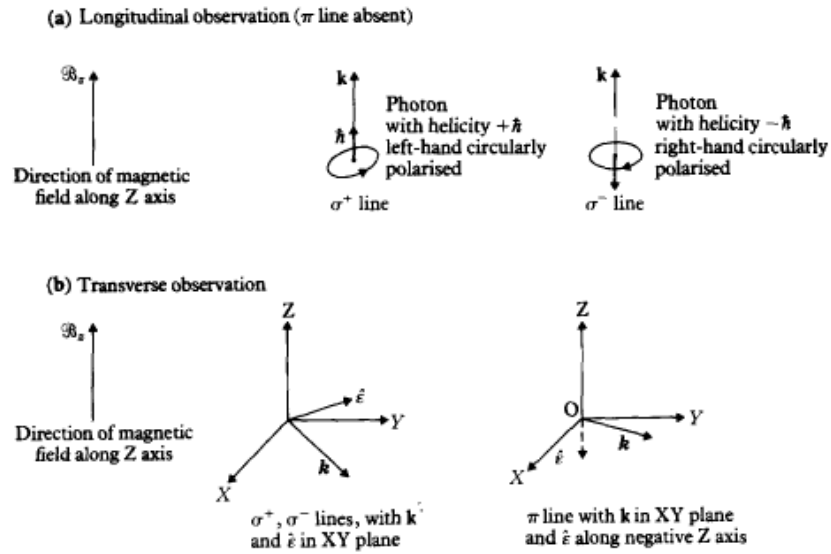
Gli elementi di matrice associati alla riga con $\Delta m = 0$ sono

$$\epsilon_{1_0} r_0 = \epsilon_{1_z} z_{ba} = -\sin\Theta z_{ba}$$

e

$$\epsilon_{2_0} r_0 = \epsilon_{2_z} z_{ba} = 0$$

Dunque avremo luce π quando $\sin\Theta$ e' diverso da zero, e solo dalla direzione 1. Per osservazioni longitudinali, $\Theta = 0$ e non e' presente linea π . Per trasverse, avremo la linea proveniente dalla direzione 1.



5.9 Polarisation of photons emitted in the direction of a magnetic field, or at right angles to a magnetic field.